توزع جزيئات الغاز المثالي بالنسبة للسرعة .

توزع ماكسويل

يعتبر التوزع الاحتمالي للسرعة أو الجملة بين الحالات المختلفة من أهم التوزعات في الفيزياء الإحصائية . وتستخدم نظرية ماكسويل للغاز المثالي للتعرف على طرق دراسة الجمل المؤلفة من عدد كبير من الجسيمات . ويمكن تمثيل كل جزيء بنقطة مادية كتلتها m حيث تتغير سرعتها من جراء التصادمات التي تتم بين الجزيئات . ولحساب التوزع الاحتمالي لسرعة هذه الجزيئات ، نفرض أن جميع اتجاهات حركة الجزيء في الفضاء لها الاحتمال نفسه ، وهذا من جراء الحركة العشوائية للجسيمات في حالة الغاز المتوازن ولنفرض أيضاً أن مساقط السرعة (v_x, v_y, v_z) هي مقادير عشوائية مستقلة الواحدة عن الأخرى . نكتب التوزع الاحتمالي من أجل v_z, v_y, v_x على النحو الآتي

$$dW(v_x) = f(v_x^2)\,dv_x \quad , \quad dW(v_y) = f(v_y^2)\,dv_y \quad , \quad dW(v_z) = f(v_z^2)\,dv_z$$

هنا نلاحظ أنه تم التعبير عن كثافة الاحتمال من أجل جميع المساقط من خلال تابع واحد f وذلك من جراء الاحتمال المتساوي لها . ونلاحظ أيضاً أن التوزع الاحتمالي متعلق فقط بالقيمة المطلقة للمسقط وليس بإشارته . فعلى سبيل المثال علينا أن نلاحظ أن الجزيئات التي قيم مساقطها $v_x = 100\ m/sec$ هي نفسها عندما تكون قيم مساقطها $v_x = -100\ m/sec$ لذلك فإن التابع f يتعلق بمربع المساقط .

إن احتمال كون الجزيء يتحرك بسرعة معينة $\vec{v}$ يساوي احتمال أخذ المساقط الثلاث لقيمها الموافقة أي أن [$dW(\vec{v}) = F(v_x, v_y, v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$

ومن جراء تساوي الاحتمال في جميع اتجاهات الحركة فإن التابع F متعلق فقط وبشكل مباشر بـ $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ وليس بـ v_z و v_y و v_x بشكل منفرد .

وبما أن المساقط v_z, v_y, v_x هي مقادير عشوائية مستقلة ينتج لدينا من فرضية جداء الاحتمالات أن

$$dW(v_x, v_y, v_z) = dW(v_x)\,dW(v_y)\,dW(v_z)$$

وبالتالي فإن

$$F(v^2) = f(v_x^2)\cdot f(v_y^2)\cdot f(v_z^2)$$

ولإيجاد شكل التابعين F و f نأخذ لوغاريتم العلاقة السابقة فنجد :

$$\ln F(v^2) = \ln f(v_x^2) + \ln f(v_y^2) + \ln f(v_z^2)$$

وبالمفاضلة بالنسبة لـ v_x^2 (نكتب الطرف الأيسر بالشكل التالي) .

$$\frac{\partial}{\partial(v_x^2)} \ln F(v^2) = \frac{1}{F}\frac{dF}{d(v^2)} \cdot \frac{\partial(v^2)}{\partial(v_x^2)} = \frac{1}{F}\frac{dF}{d(v^2)}$$

وعند اعتبار مساقط السرعة هي متحولات مستقلة نجد

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{d(v^2)} = \frac{1}{f}\frac{df}{d(v_x^2)}$$

وعندما يكون التابعان لمتحولين مستقلين مختلفين متساويين ثابتاً واحداً فإنه علينا اعتبار هذين التابعين متساويين ومساويين لقيمة واحدة .

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{d(v^2)} = -B \quad , \quad \frac{1}{f}\frac{df}{d(v_x^2)} = -B$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على العلاقتين التاليتين .

$$f(v_x) = A\, e^{-Bv_x^2} \quad , \quad F(v) = B\, e^{-Bv^2}$$

ومن هاتين العلاقتين نجد أن $B>0$. وإلا فإنه كلما كانت السرعة أكبر كان الاحتمال أكبر (كبيراً) .

يتم تحديد الثابتين A و B من شرط التنظيم ومن العلاقة $F(v^2)=f(v_x^2)f(v_y^2)f(v_z^2)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-Bv_x^2}\, dv_x = 1 \qquad B = A^3$$

ومنه نجد أن قيمة A هي (بالاستفادة من تكاملات بواسون) .

$$A = (B/\pi)^{1/2}$$

وبالتالي فإن التوزع يكتب بالنحو التالي .

$$(F \text{ التوزع}) \quad dW(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-Bv^2}\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

ويمكن كتابته من أجل المساقط الثلاثة على النحو التالي

$$dW(v_x) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/2} e^{-Bv_x} dv_x$$

$$dW(v_y) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/2} e^{-Bv_y} dv_y$$

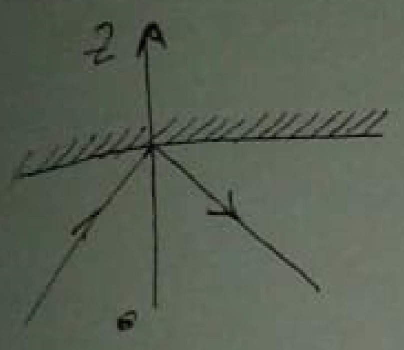
$$dW(v_z) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/2} e^{-Bv_z} dv_z$$

إن ظهور الوسيط B الذي يميز عدد الجزيئات ذات السرع المختلفة يعتبر صفة مميزة في العلاقات التي تم الحصول عليها . وإن ظهور هذا الوسيط مرتبط بجوهر طرق الدراسة الإحصائية .

(المعنى الفيزيائي للوسيط β).

- ضغط الغاز على جدار الوعاء:

لندرس التصادم المرن للجزيء مع جدار الوعاء. عند التصادم تتغير المساقط الناظمية للسرعة إشارتها بينما تحافظ المساقط المماسية على قيمتها. فإذا فرضنا أن المحور oz عمودي على سطح الجدار يكون:



$$\vartheta_{2z} = -\vartheta_{1z} \;,\; \vartheta_{2x} = \vartheta_{1x} \;,\; \vartheta_{2y} = \vartheta_{1y}$$

حيث ϑ_1 و ϑ_2 هو سرعة الجسيمات قبل التصادم وبعده.

فإن تغير الدفع الموافق يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{\Delta P} = 2m\,\vartheta_{2z}\,\vec{K}$$

حيث $\vec{K}$ هو متجه الواحدة على المحور z.

عند كل تصادم فإن الجدار يكتسب تزايداً في الدفع مساوياً بالقيمة المطلقة ولكنه مختلف في الاتجاه. لنفرض أن $\vec{\Delta I}$ هو الدفع الذي يكتسبه الجدار ذو السطح S خلال الفترة الزمنية Δt.

واعتماداً على قوانين الميكانيك. لدينا $\vec{\Delta I} = \vec{F}.\Delta t$.

حيث $\vec{F}$ هي متوسط القوة المضاعفة من جهة الجزيئات على السطح.

وبالتعريف فإن الضغط يتحدد بقسمة القوة على السطح F/S. ويكمن الصعوبة الأساسية في حساب الضغط في امتلاك الجسيمات سرعاً مختلفة. فلو كان لكل جسيم نفس مساقط السرعة ϑ_z فإن المناقشة تقود الى أنه خلال الزمن Δt تصل جميع الجسيمات الموجودة في الطبقة التي سماكتها $\vartheta_z \Delta t$ الى السطح فإن متوسط عددهم يساوي حجم الطبقة المجاورة للجدار $\vartheta_z \Delta t.S$ مضروباً في كثافة الغاز n أي أنه يساوي $n.\vartheta_z.\Delta t.S$. ونعتبر الزمن Δt صغيراً جداً بحيث يكون الجدار ($\vartheta_z \Delta t$) أصغر من المسار الحر الوسطي. وعند ذلك يمكن إهمال تصادم الجزيئات مع بعضها البعض. وفي الواقع فإن قسماً من هذه الجزيئات تملك قيماً محددة ϑ_z.

وبالاعتماد على التوزع على المحور oz (من الفقرة السابقة) فإن عدد الجزيئات في واحدة الحجم يعطى بالعلاقة

$$dn(\vartheta_z) = n.dW(\vartheta_z) = n\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}.e^{-\beta\vartheta_z^2}.d\vartheta_z$$

ومن هنا فإن متوسط عدد الجزيئات التي سرعتها ϑ_z والتي تصدم الجدار خلال الزمن Δt هو.

$$dn(\vartheta_z).\vartheta_z.S.\Delta t = n\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}e^{-\beta\vartheta_z^2}.\vartheta_z.S.\Delta t.d\vartheta_z$$

وهذه الجزيئات تنقل للجدار دفعاً مساوياً

$$2m.n\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}.e^{-\beta\vartheta_z^2}\vartheta_z^2.d\vartheta_z.S.\Delta t$$

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt} = \frac{dv}{dt} = a$$

نطبق هذه العلاقة بالنسبة لـ v_z في المجال من صفر وحتى اللانهاية (هنا لأن الجزيئات المرتدة من الجدار والتي سرعتها $v_z<0$). وبعد ذلك نقسم النتيجة على $S.\Delta t$ فنحصل على

$$P=2mn.\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty} v_z^2\, e^{-\beta v_z^2}.\,dv_z$$

وبحساب التكامل نفترض تكاملات بواسون فنحصل على ضغط الغاز:

$$P=\frac{m.n}{2\beta}=\frac{mN}{2\beta V}$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع علاقة كلابيرون - مندلييف:

$$PV=\frac{m}{\mu}RT=KNT$$

نحصل على قيمة β

$$\beta=\frac{m}{2KT}.$$

وبالاعتماد على هذه العلاقة يمكن إيجاد المعنى الفيزيائي للوسيط β. ومنه تتضح الصلة بين أحد المقادير الترموديناميكية درجة الحرارة. وبالتالي فإن درجة الحرارة هي معيار خاص لشدة الحركة الداخلية للجزيئات.

- توزع ماكسويل للسرعة غير الموجهة (طاقة الغاز المثالي):

إن تابع التوزع الاحتمالي للسرعة يسمح بالتفسير الهندسي وهو يحدد احتمال وقوع نهاية متجه السرعة في عنصر حجم فضاء السرعة، حيث تتوضع v_x، v_y، v_z على المحاور الإحداثية الديكارتية. وبالانتقال إلى الإحداثيات الكروية v,θ,φ حيث

$$v_x=v\sin\theta\cos\varphi\ ,\quad v_y=v\sin\theta\sin\varphi\ ,\quad v_z=v\cos\theta$$

و

$$\frac{\partial(v_x,v_y,v_z)}{\partial(v,\theta,\varphi)}=v^2\sin\theta$$

ويعطى توزع ماكسويل للسرعة بالنسبة للمتحولات الجديدة (الكروية) بالعلاقة التالية.

$$dW(v,\theta,\varphi)=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta v^2}.\,v^2\sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$$

وبإجراء المكاملة بالنسبة لـ φ و θ على جميع مجالات تغير هذين المتحولين. نكتب

$$dW(v)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}.\,e^{-\beta v^2}\,v^2\sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$$

وبإجراء المكاملة θ و φ بشكل مستقل عن المتحول v

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta . d\varphi=4\pi$$

وبالنتيجة نحصل على التوزع التالي.

$$dW(v)=4\pi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}.\,e^{-\beta v^2}\,v^2\,dv$$

وتسمى هذه العلاقة بـ تابع توزع ماكسويل للسرع المطلقة . وبالاعتماد على هذه العلاقة نحسب الطاقة الوسطى للجسيم :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{m v^2}}{2} = 4\pi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \frac{m}{2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\beta v^2} \cdot dv$$

وبإجراء التكامل اعتماداً على تكاملات بواسون نحصل على

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3m}{4\beta} = \frac{3}{2} KT$$

وبالتالي فإن طاقة الغاز الكلية تساوي جداء عدد الجسيمات في الطاقة الوسطى للجسيم الواحد

$$U = N\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} NKT$$

ونلاحظ أن الطاقة والضغط مرتبطان بالعلاقة التالية .

$$PV = \frac{2}{3} U$$

- خواص توزع ماكسويل للسرع (السرعة الأكثر احتمالاً) .

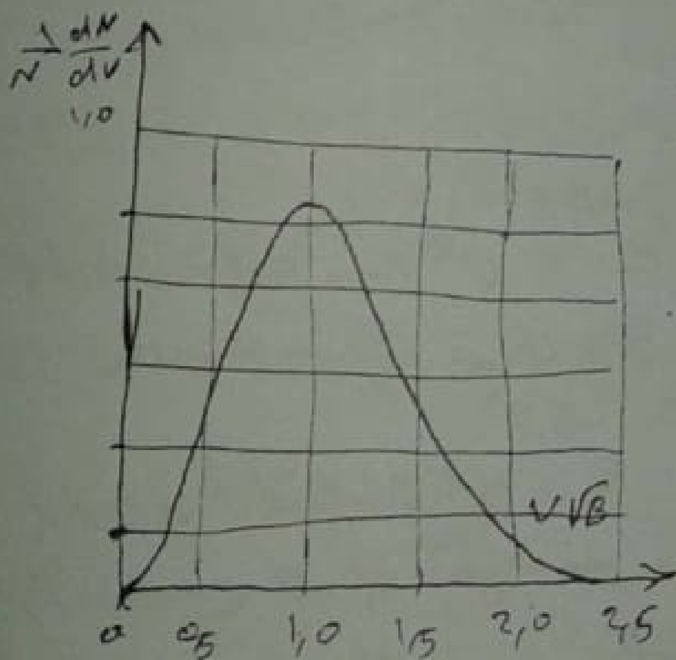
لنفرض أنه لدينا في وعاء N جسيم من غاز مثالي حيث يكون الجدار $N dW(v)$ عدد الجزيئات $dN(v)$ التي سرعتها محصورة في المجال v وحتى $v+dv$. وبالاعتماد على علاقة التوزع: $dW(v) = 4\pi\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta v^2} v^2 dv$ يمكن أن نكتب .

$$dN(v) = \rho(v)\, dv$$

حيث

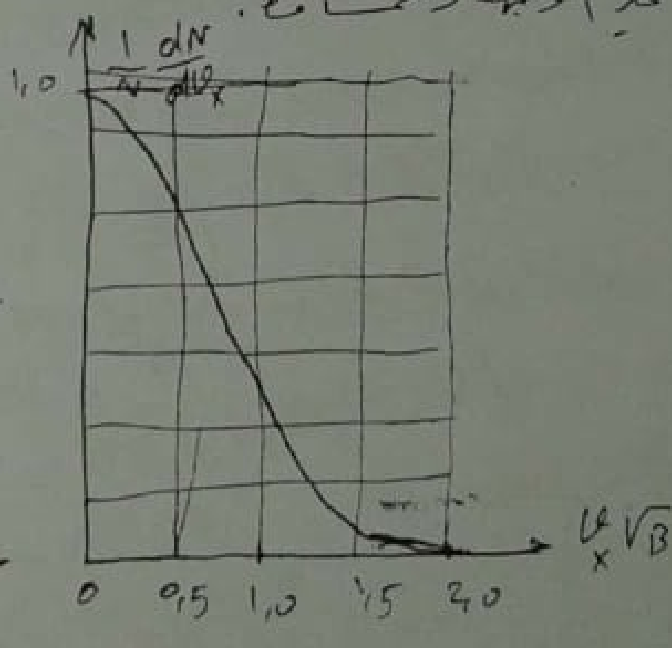
$$\beta = \frac{m}{2KT} \quad , \quad \rho(v) = 4\pi N\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta v^2} v^2$$

يسمى التابع $\rho(v)$ تابع التوزع الاحصائي للجسيمات بالنسبة للسرع ، كما أن العلاقة $\frac{\rho(v)}{N} = \frac{1}{N}\frac{dN(v)}{dv}$ تمثل تركيز جزيئات ذات سرع معينة . وهذا التركيز يساوي كثافة الاحتمال للسرع غير الموجهة ويبين الشكلان التاليان منحني كثافة الاحتمال للسرع غير الموجهة وللمساقط .



a

توزع ماكسويل للسرع غير الموجهة



b

توزع ماكسويل لمساقط السرع .

في الشكل الأول نجد أن المنحني يمتلك نهاية عظمى وهذا يفسر بأن التابع $P(v)$ مكون من مقدارين أحدهما متزايد والآخر متناقص عند تزايد السرعة v.

نشتق $P(v)$ بالنسبة لـ v ونساوي المشتقة بالصفر فنحصل على نقطة النهاية العظمى والتي تمثل بدورها السرعة الأكثر احتمالاً للجزيئات.

$$\frac{d}{dv}\left(e^{-\beta v^2} \cdot v^2\right) = 0$$

ومنه نجد أن

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

وبالاعتماد على العلاقات (راجع التكاملات لبواسون) نحصل على القيمة الوسطى للسرعة والقيمة الوسطى لمربع السرعة.

$$\overline{v} = \int_0^\infty v\, dW(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi \beta}} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$$

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2\, dW(v) = \frac{3}{2\beta} = \frac{3KT}{m}$$

ملاحظة:

تكاملات بواسون

نسمي التكامل من الشكل

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\, dx$$

أو من الشكل

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2n}\, dx$$

نسميه تكامل بواسون.

أو بشكل عام فإن تكاملات بواسون تمثل بالشكل العام

$$I_m = \int_0^\infty x^m e^{-\alpha x^2}\, dx$$

حيث α وسيط و m هو عدد صحيح زوجي أو فردي وبالتالي.

عندما يكون m عدداً زوجياً فإن

$$I_m = I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{(2n-1)!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

وعندما يكون m عدداً فردياً فإن

$$I_m = I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$$

وبالتالي فإن

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad I_1 = \frac{1}{2\alpha}, \quad I_3 = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

ملاحظة: ص ٢: قيم التكاملات الخاصة المستخدمة عند دراسة الاحصاءات الكوانتية.

$$1- \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$2- \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2{,}612 = 2{,}31$$

$$3- \int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$4- \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \times 1{,}341$$

$$5- \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$6- \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$7- \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2{,}404$$

صيغة ستيرلينغ:

تستخدم هذه الصيغة في العلاقات التي تحتوي على الاعداد العاملية عندما تكون كبيرة جدا ويمكن الحصول على الصيغة التقريبية لصيغة ستيرلينغ على النحو التالي:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

بأخذ لوغاريتم هذه العلاقة نجد

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

فإذا كانت K كبيرة لدرجة كافية $(K \gg 1)$ يمكن تحويل المجموع الى تكامل وبعد مكاملة التكامل نحصل على صيغة ستيرلينغ التقريبية:

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \int_1^{n} \ln k\, dk = k \ln k \Big|_1^n - \int_1^n dk \simeq n(\ln n - 1)$$

أي أن صيغة ستيرلينغ تعطى بالشكل التالي:

$$\ln N! = N \ln N - N$$

ويمكن كتابة صيغة ستيرلينغ التقريبية بالشكل التالي

$$\ln N! = N\ln N - N = N(\ln N - 1) = N(\ln N - \ln e) = N \ln \frac{N}{e}$$

وهذا يعني أن

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

وفي حال لم تكن N صغيرة يجب استخدام صيغة ستيرلينغ بشكل أدق

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

ندرس الآن بعض تطبيقات توزيع ماكسويل .

نتعرض الخيوط الطيفية (مفعول دوبلر) .

١- نتعرض الخيوط الطيفية الناتج عن مفعول دوبلر لكونه يستخدم كاختبار تجريبي لعلاقة توزيع ماكسويل للسرعة .

إذا افترضنا أن جزيئات غاز ما وهي تقذف لمصدر إشعاعاً طول موجته λ_0 في الاتجاه الذي يرصده مراقب، ولتكن أحد هذه الجزيئات متحركة بسرعة لها مركبة v_x باتجاه المراقب حيث تصل الى المراقب بطول موجة λ .

يعطى طول الموجة هذا وفقاً لعلاقة دوبلر النظامية ب $\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right)$

يمكن كتابة السرعة v_x بدلالة طول الموجة λ عن طريق اعادة ترتيب المعادلة السابقة .

$$* \quad v_x = \frac{c(\lambda_0 - \lambda)}{\lambda_0}$$

وان مشتقة السرعة هو .

$$*' \quad dv_x = -\frac{c}{\lambda_0} d\lambda$$

وبما ان عدد الجزيئات الذي له مركبة سرعة في المجال v_x و $v_x + dv_x$ يمكن الحصول عليه من علاقة توزيع ماكسويل للسرعة $dw(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta v^2} dv_x dv_y dv_z$ فإننا يمكن أن نكتب

$$\text{عدد الجزيئات} = \left[\frac{m}{2\pi KT}\right]^{1/2} \cdot e^{-\frac{m v_x^2}{2KT}} \cdot dv_x$$

هنا وضعنا الراقب مع المحور x فقط .

ان شدة الإشعاع الذي يتلقاه المراقب في المجال الموجي λ و $\lambda + d\lambda$ يمكن الحصول عليه بتبديل فيه v_x و dv_x من المعادلة $*$ و $*'$ فنحصل على .

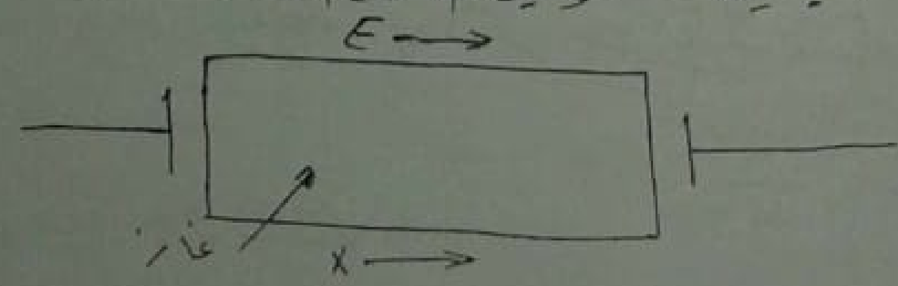
$$f(\lambda)\,d\lambda = \left[\frac{m}{2\pi KT}\right]^{1/2} \cdot \left[e^{-\frac{mc^2}{2KT}\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0}\right)^2} \cdot \frac{c}{\lambda_0} \right] d\lambda$$

وان كثافة التوزيع كتابع لطول الموجة له شكل منحني غوص حول القيمة λ_0 .

٢- معادلة اينشتاين في الانتشار

لندرس الآن احدى التطبيقات لتوزيع ماكسويل بولتزمان الذي يربط ما بين الحركية μ والانتشار D لشوارد غاز ما .

نفرض أنه لدينا غاز محصور ضمن وعاء جدرانه غير ناقلة. ثم نطبق حقلاً كهربائياً E على الغاز بواسطة صفيحتين مشحونتين خارج الوعاء كما في الشكل



نفرض $n(x)$ عدد الشوارد في واحدة الحجم على مسافة قدرها x من نهاية الصوديوم ونعلم أن q هي شحنة الأيون، فإن الطاقة الكامنة هناك مقارنة عن المسافة $x=0$ تساوي:

$$\varepsilon(x) = -qE_x$$

وبشرط أن تركيز الشوارد غير كبير حتى لا يؤثر على تجانس قيمة الحقل الكهربائي.
وبسبب تدرج الطاقة سيكون هناك تدرج في تركيز الشوارد للغاز.
وباستخدام عامل بولتزمان من أجل الاحتمال النسبي لأن يكون للشاردة طاقة خاصة، تعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{n(x)}{n(0)} = e^{\frac{-\varepsilon(x)}{KT}} = e^{\frac{qE_x}{KT}}$$

حيث $n(0)$ - تركيز الشوارد عند $x=0$ و T هي درجة حرارة الغاز.
ونفرض أن حركية الشوارد μ لذلك سيوجد سرعة انجراف تساوي μE في اتجاه الحقل E وبالتالي تيار جاري من الشوارد ومعه المحور x، تكون قيمته في واحدة المساحة والزمن هي:

$$J_d = n(x).\mu E$$

وإذا كان معامل الانتشار D العائد للشوارد، فسيوجد تيار انتشار لها عبر واحدة المساحة عند مسافة x تساوي قيمته له

$$J_D = -D\frac{dn(x)}{dx}$$

وهي مقارنة في واحدة الزمن في اتجاه تدرج التركيز، وفي حالتنا هذه لا يوجد تدفق للتيار، لذلك لن يكون هناك محصلة لحركة الشوارد (أي أن المحصلة صفراً) وبالتالي

$$J_d + J_D = 0$$

ومن المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$* \quad n(x).\mu E = D\frac{dn(x)}{dx}$$

لنأخذ قيم $n(x)$ (من عبارة الاحتمال النسبي). ثم نشتقه فنجد

$$\frac{d(n(x))}{dx} = n(0).\frac{qE}{KT}.e^{\frac{qE_x}{KT}}$$

نعوض هذه القيمة في العلاقة الأخيرة * فنجد.

$$n(x)\mu E = D.n(0)\frac{qE}{KT}.e^{\frac{qE_x}{KT}}$$

من الطرف الأيمن نجد أن $n(0)e^{\frac{qE_x}{KT}}$ هي مساوية لـ $n(x)$ إذن

$$\mu E = D.\frac{qE}{KT} \Rightarrow \mu = \frac{Dq}{KT}$$

أي أن

$$\frac{\mu}{D} = \frac{q}{KT}$$

وهي معادلة الانتشار.

توزيع ماكسويل بولتزمان لحالة الجملة الكوانتية

١- معطيات الحالة الميكروسكوبية للجملة الكوانتية.

يوجد في الجمل المغلقة الواقعة في شروط خارجية مستقرة حالات ممكنة ذات طاقة محددة E وهذه الحالات توصف بالتوابع الموجية ψ_α والتي نحصل عليها مع القيم الممكنة E_α من معادلة شرودينغر

$$\hat{H}\psi_\alpha = E_\alpha \psi \qquad (1)$$

حيث

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i\right) + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_N)$$

حيث Δ_i هو مؤثر لابلاس لإحداثيات الجسيم i، إن توابع الحالة ψ_α تتعلق بإحداثيات جميع الجسيمات. وفي الفيزياء الإحصائية ليس من الضروري معرفة التوابع الموجية، ويكفي معرفة سويات الطاقة E_α، درجة توالدهم وإيجاد جملة الأعداد الكوانتية α التي تحدد حالة الجملة بشكل كامل.

تحل المعادلة (1) بشكل تقريبي، ويعتبر الغاز المثالي حالة خاصة حيث يمكن فيه إهمال التأثيرات المتبادلة بين الجسيمات وفي هذه الحالة يمكن اعتبار التابع الموجي للجملة عبارة عن جداء التوابع الموجية لكل جسيم على حدة. أي

$$\psi_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_N) = \psi_{\alpha_1}(\vec{r}_1) \cdot \psi_{\alpha_2}(\vec{r}_2) \ldots \psi_{\alpha_N}(\vec{r}_N)$$

وهي بدورها $\psi_{\alpha_i}(\vec{r}_i)$ يمكن إيجادها من معادلة شرودينغر من أجل كل جسيم.

$$\hat{H}_i \psi_{\alpha_i}(\vec{r}_i) = \varepsilon_{\alpha_i}(\vec{r}_i) \qquad (2)$$

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

المشتقة الثانية بالنسبة للمسافة

$$\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i + U(\lambda, \vec{r}_i)$$

وحيث

$$E_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{\alpha_i}$$

توافق كل قيمة خاصة للطاقة حالة محددة أو أكثر توصف بتابع موجي خاص أو أكثر. فإذا وافقت سوية طاقية واحدة لبعض التوابع الخاصة أو لبعض الحالات الخاصة فإن مثل هذه السوية تسمى سوية مولدة، وعند ذلك فإن عدد الحالات التي توافق الطاقة المعطاة تسمى درجة التوالد (التحلل) وتسمى أحياناً الوزن الإحصائي.

إن المعنى الفيزيائي ليس لدالة الموجة من التابع الموجي $\psi_\alpha(r)$ ولكن من مربع معامله $|\psi(r)|^2$ الذي يكتب أحياناً بالشكل $\psi\psi^*$. ويرتبط مربع معامل تابع الموجة مع احتمال وجود الجملة الكوانتية ذات الإحداثيات $q_1, q_2 \ldots q_N$ في عنصر الفضاء $dq_1, dq_2 \ldots dq_N$ بالعلاقة التالية

$$dW(q_1, q_2 \ldots q_N) = |\psi|^2 dq_1 dq_2 \ldots dq_N$$

أي أن $|\psi|^2$ يعبر عن كثافة التوزع الاحتمالي، ومن جراء ذلك فإن مربع معامل التابع الموجي يحقق شرط التنظيم أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 dq = 1$$

$$\psi\overline{\psi}$$

المرافقة

اذا حققت التابع الموجي $\Psi(q_1, q_2 \dots q_n)$ معادلة شرودينغر فان التابع الموجي $\Psi(q_2, q_1 \dots q_n)$ يحقق نفس معادلة شرودينغر (حيث تم هنا تغير ترتيب الجسيمات) وهذه الخاصة للتابع الموجي تعكس حقيقة عدم تمايز الجسيمات في الميكانيك الكوانتي. أي أنه عند اعادة تبادل الجسيمات الاحداثيات كل مع الآخر فإننا لا نحصل على علاقة كوانتية جديدة (الا) أنه عند اعادة توضع الجسيمات فان التابع الموجي يمكن أن يغير اشارته، حيث يسمى التابع الذي يغير اشارته عند اعادة توضع جسيمين اثنين تابعاً غير متناظر، أما إذا لم يغير اشارته فانه يسمى تابعاً "متناظراً".

وتوجد في الطبيعة جسيمات توصف بالتوابع الموجية المتناظرة أو بالتوابع الموجية غير المتناظرة. وان التابع الموجي المتناظر يتعلق بسبين الجسيمات التي تشكل الجملة الكوانتية. فإذا كان للجسيمات سبين صحيح فانها توصف بالتابع الموجي المتناظر مثل الديتونات (البوزونات) $\Psi(1,2)=\Psi(2,1)$ أما إذا كان للجسيمات سبين كسري فانها توصف بالتابع الموجي غير المتناظر مثل الالكترونات (الفرميونات) أي $\Psi(1,2)=-\Psi(2,1)$.

ويحدد شكل التابع الموجي (التناظر في التابع الموجي) عدد حالات الجملة المختلفة وهو يقودنا الى احصائيتين كوانتيتين هما احصاء فيرمي - ديراك واحصاء بوزه - اينشتاين.

تخضع الجسيمات ذات السبينات الكسرية الى مبدأ الاستبعاد لباولي الذي يفترض استحالة وجود جسيمين اثنين في حالة كوانتية واحدة.

٤- حساب عدد الحالات الممكنة للغاز المثالي:

لنحدد عدد الحالات الممكنة للغاز المثالي. يمكن اعتبار الجزيئات هنا بمثابة جمل جزئية تكون الجملة الكلية وباستخدام العلاقة الاساسية لطاقة الجسم الانسحابية من الميكانيك الكوانتي من أجل وصف حالة كل جسيم نكتب

$$\mathcal{E}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2) \quad (3)$$

لنحسب أولاً عدد الحالات الممكنة لجزيئة واحدة في مجال الطاقة $0 \le \mathcal{E} \le \mathcal{E}_0$. ومن أجل ذلك نستخدم فضاء الحالات الكوانتية التي تتوضع فيه الاعداد الكوانتية على المحاور الاحداثية n_1, n_2, n_3 ويكون لدينا $1 \le n_i \le n_0$ و $(i=1,2,3)$.

وبالتالي من العلاقة (3) نجد

$$n_0=\left(\frac{2ma^2\mathcal{E}_0}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/2} \quad (4)$$

توافقة كل نقطة ذات القيم الصحيحة (n_1, n_2, n_3) حالة واحدة. وان النقاط التي توضح حالات الجزيئات تقع في الربع الأول من كرة نصف قطرها n_0، حيث يكون عدد هذه النقاط عند قيم كبيرة لـ n_0 قريباً من حجم هذا الجزء من الكرة، وأن كل نقطة تمثل واحدة الحجم للفضاء المختار ومن هنا فان عدد الحالات يعطى بالعلاقة.

$$\xi=\frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi n_0^3=\frac{V(2m\mathcal{E}_0)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} \quad (5)$$

حيث $V=a^3=n_0^3$ تقريباً

وإن عدد الحالات الموجودة في مجال صغير جداً للطاقة هو مقدار كبير. وبالاعتماد على العلاقة (5) نجد أن

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = \frac{Vm}{2\pi^2 \hbar^3}\sqrt{2m\varepsilon}\, d\varepsilon \qquad (6)$$

ونحصل على جميع الحالات الميكروسكوبية للجملة المؤلفة من جسيمين اثنين مستقلين عن بعضهما بتركيب عدد الحالات الممكنة للجسيم الأول مع عدد الحالات الممكنة للجسيم الثاني. فإذا كان للجسيم الأول ξ_1 حالة مختلفة وللثاني ξ_2 حالة مختلفة فإنه يصبح للجملة الكلية عدد من الحالات الميكروسكوبية Ω مساوياً إلى جداء ξ_1 في ξ_2 وبالتالي من أجل مجموعة جزيئات الغاز المثالي فإن هذا العدد يعطى بالعلاقة:

$$\Omega = \prod_{i=1}^{N} \xi_i$$

علاقة عدم التعيين وعدد الحالات الكوانتية.

يمكن حساب عدد الحالات الكوانتية بشكل سهل باستخدام الطريقة التقريبية التالية

ولنأخذ أولاً تشابه العلاقة $dg = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 4\pi m V\sqrt{2m\varepsilon}\, d\varepsilon$ والتي حصلنا عليها عند دراسة الفضاء الطوري مع العلاقة (6). بمقارنة هاتين العلاقتين نجد أن حجم الفضاء الطوري dg والذي يوافق جميع حالات جسيم كلاسيكية ذات الطاقة المتغيرة في المجال ε وحتى $\varepsilon + d\varepsilon$ تكون متناسبة مع عدد الحالات الكوانتية لهذا الجسيم $d\xi$ لذلك فإن:

$$d\xi = \frac{dg}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (7)$$

وهذه النتيجة تعمم من أجل أية جملة لها f درجة حرية. وإن عدد الحالات الكوانتية $d\Omega$ الذي يوافق عنصر الحجم الطوري $d\Gamma$ يتحدد بالعلاقة التالية:

$$d\Omega = \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^f} \qquad (8)$$

حيث f هو عدد درجات الحرية. و $d\Gamma = dq_1 dq_2 \ldots dq_f \cdot dp_1 dp_2 \ldots dp_f$

في هذه العلاقة (8) نشير إلى أنه في الميكانيك الكوانتي لا يمكن أن تعطى الإحداثيات المعممة q_i والدفوع الموافقة p_i بدقة بنفس الوقت. وإن المقادير الميكروسكوبية لهذه المقادير تكتب في مجال عدم الدقة Δp_i و Δq_i اللذان ترتبطان بمتراجحة هايزنبرغ.

$$\Delta q_i \cdot \Delta p_i \geq \hbar \qquad (9)$$

لذلك لا يجوز مقارنة النقطة الطورية بالحالة الكوانتية. وإن الحجم المعين للفضاء الطوري $\Delta\Gamma$ والذي يوافق الحالة الكوانتية يساوي جداءات علاقة عدم التعيين $\prod_{i=1}^{f} \Delta q_i \cdot \Delta p_i$

وبالتالي اعتماداً على العلاقة (9) فإن ~~$\Delta\Gamma \geq \hbar^f$~~ $[\Delta\Gamma \geq \hbar^f]$ وفي الجمل الماكروسكوبية تتحقق لدينا المساواة التقريبية بدقة كبيرة أي $\Delta\Gamma \approx (2\pi\hbar)^f$

وأيضاً نقول فكلما كانت هذه الصيغة دقيقة كلما اقتربت حركة الجسيمات من الحالة الكلاسيكية.

فرضية ليوفيل وعلاقة تابع التوزع بالطاقة

لنفرض أننا نراقب خلال فترة زمنية طويلة جملة معينة تمثل جزءاً صغيراً من جملة كبيرة مغلقة ولنقسم الفترة الزمنية إلى فترات زمنية صغيرة Δt . تمثل هذه المجموعة في الفضاء الطوري بنقاط تتوافق مع حالات الجملة في اللحظات Δt حيث تتوضع مجموعة النقاط في الفضاء الطوري بكثافة متناسبة في كل نقطة مع قيمة تابع التوزع $\rho(q,p)$.

في حالة التوازن فإن تابع التوزع الاحصائي $\rho(q,p)$ لا يتعلق بالزمن. وهذا يعني أن كثافة النقاط الطورية في أي مكان من الفضاء الطوري تبقى ثابتة وغير متعلقة بالزمن.

يمكن دراسة صيغة حركة جميع النقاط الطورية كحركة جزيء الغاز في الفضاء ذي البعد $2f$ حيث نستخدم مبدأ معادلة الاستمرار المعروفة والتي تمثل انحفاظ عدد الجسيمات الكلي (هنا تعني النقاط الطورية). تكتب معادلة الاستمرار على النحو التالي:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

حيث $\vec{v}$ هي سرعة جريان الغاز أو السائل. و

ويتم تعميمه للتفرق على الفضاء متعدد الأبعاد على النحو التالي $\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$

وفي حالتنا هذه $i=1,2,\ldots,2f$ وتتطابق الاحداثيات x_i مع الاحداثيات المعممة q_i والدفع المعمم p_i للجملة.

تعتبر المشتقات $\dot{q}_i$ و $\dot{p}_i$ عبارة عن مركبات شعاع السرعة للنقاط الطورية وبالتالي تأخذ معادلة الاستمرار لغاز النقاط الطورية الشكل التالي:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right\} = 0 \qquad (2)$$

وبما أن $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ (في حالة التوازن) فإن

$$\sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right\} = 0 \qquad (3)$$

وبإنجاز التفاضلات وجمع المركبات نحصل على

$$\sum_{i=1}^{f} \left(\dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) + \rho \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0 \qquad (4)$$

ولدينا من معادلات هاملتون.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = \frac{-\partial H}{\partial q_i} \qquad (5)$$

ومن التالي فإن

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \quad , \quad \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{-\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}$$

إذن

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = -\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \qquad (6)$$

وبالتالي يسعى الحد الثاني في العلاقة (4) الى الصفر عندئذ تصبح العلاقة (4) بالشكل التالي

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = 0 = \frac{d\rho}{dt} \qquad (7)$$

وهذا يعني أن تابع التوزع الاحصائي ثابت على طول مسار النقاط الطورية في الفضاء الطوري. أي أن كثافة النقاط الطورية عند حجم معين في الفضاء الطوري أو عند الانتقال الى منطقة أخرى من الفضاء تبقى ثابتة وغير متعلقة بالزمن. وهذا هو محتوى مبرهنة ليوفيل.

ان مساواة المشتقات بالنسبة لكثافة الغاز للنقاط الطورية مع الصفر تعني أنه إذا وزعنا النقاط الطورية على طول المسار الطوري فان قيم التابع $\rho(q,p)$ تبقى ثابتة على كل الطريق الذي تسلكه اي تبقى كثافة الغاز ثابتة عند تدفق النقاط الطورية.

تستخدم خواص الكثافة الطورية في ايجاد النتيجة الهامة التالية: لنعزل dn نقطة طورية ضمن عنصر الحجم $d\Gamma_1$ في فترة زمنية t_1 ومع مرور الزمن تنتقل جميع هذه النقاط الى حجم صغير آخر $d\Gamma_2$ واعتماداً على تعريف الكثافة الطورية نكتب

$$dn = \rho_1 d\Gamma_1 = \rho_2 d\Gamma_2$$

ومن خلال العلاقة (7) نجد أن $\rho_1 = \rho_2$ ومنه نجد أن $d\Gamma_1 = d\Gamma_2$.

ان الوصول الى العلاقة (7) هو نتيجة لقوانين الميكانيك الكلاسيكي التي توصف حركة الجسيمات في الجملة. وتحدد هذه الفرضية عندما نشكل تابع التوزع $dw = \rho(q,p)\,d\Gamma$ حيث يعد المقدار $\rho(q,p)$ عدد تكامل الحركة، الذي هو يتعلق ببعض المتحولات التي تعتبر تكاملاً للحركة الميكانيكية للجملة.

من أجل جملتين جزئيتين شبه مستقلتين $\rho = \rho_1 \rho_2$ نكتب.

$$\ln\rho = \ln\rho_1 + \ln\rho_2$$

وهذا يعني أن لوغاريتم تابع التوزع الإحصائي هو تكامل جمعي للحركة، ولكن فإن عدد هذه التكاملات هو سبعة، الطاقة E، وثلاثة مساقط للدفع $\vec{P}$، وثلاثة مساقط لعزم الدفع $\vec{M}$. فإذا اعتبرنا أيضاً أن الدفع وعزم الدفع يتعلقان بشكل عام بحركة الجملة فإن ذلك يقودنا الى اعتبار تابع التوزع الاحصائي متعلقاً بشكل مباشر بمتحول واحد هو الطاقة $\rho = \rho(E(q,p))$ [في الفيزياء الاحصائية ندرس فقط الحركة الداخلية في الجملة].

- توزيع جيبس:

الحالات الجهرية وانسامبل جيبس

من المعروف أن حالة الجملة الترموديناميكية تتعين بمعرفة خواص هذه الجملة (ضغط، حجم، درجة حرارة) وهو ما يدعى بالحالة الماكروسكوبية (الجهرية) للجملة. في حين أن الحالة الميكروسكوبية (المجهرية) تتميز بالقيم الآنية لعدد من المتحولات والتي تتغير مع الزمن وذلك من أجل جميع جزيئات الجملة التي عددها N.

ومن المعلوم أن حالة الجملة في وضع التوازن لا تتغير مع الزمن في حين أن المتحولات الميكروسكوبية تتغير بشكل مستمر بحيث يبقى هذا التغير الحالة الجهرية ثابتة. لذلك فإن وجهة النظر الكلاسيكية تنص على أن كل حالة ماكروسكوبية يوافقها عدد كبير من الحالات الميكروسكوبية.

إن دراسة السلوك الإحصائي للجمل الترموديناميكية يمكن أن يتم كما افترض جيبس بطريقة الانسامبل. حيث أن الانسامبل هو عدد ضخم جداً من الحالات الميكروسكوبية والتي تكون في تناسب تام مع حالة ماكروسكوبية أو حالة ترموديناميكية. أي أن الانسامبل هو تجمع كبير جداً من الجمل الترموديناميكية المتشابهة (جمل جزئية) أو يمكن تسميتها (نسخ) والتي يكون لها المميزات نفسها من وجهة نظر الترموديناميك ولكن توجد بحالات ميكروسكوبية مختلفة. وتبعاً للمهمة أو المسألة المطروحة فإن استخدام انسامبلات متنوعة تتوافق مع الشروط المختلفة المفروضة على الجملة الترموديناميكية. وسنبين فيما يلي أهم الانسامبلات المستخدمة.

1- الانسامبل القانوني المجهري: يوافق جملاً معزولة لا تتبادل الطاقة والمادة مع بعضها البعض، أي أن N و V و U تكون ثوابت وهو ما تمت دراسته بحثه سابقاً.

2- الانسامبل القانوني: ويوافق جملاً متساوية درجة الحرارة ومغلقة تتميز بقيم معينة لـ V، N، T، أي أن هذه الجمل تكون متوازنة حرارياً وتستطيع تبادل الطاقة مع بعضها البعض، وهو مناسب جداً لدراسة الترموديناميك الإحصائي.

3- الانسامبل القانوني الكبير: وهو عبارة عن جمل متساوية الحرارة، مفتوحة وتتميز بحجم ثابت V وبدرجة حرارة ثابتة T. يمكن لهذه الجمل أن تتبادل الطاقة مع بعضها البعض وأيضاً الجسيمات.

لندرس فيما يلي الانسامبل ذو درجة الحرارة الثابتة ثم ننتقل لدراسة الانسامبل القانوني الكبير.

- الانسامبل ذو درجة الحرارة الثابتة:

في هذا الانسامبل تكون كل نسخة من نسخه (جملة من جمله) تكون متوازنة حرارياً. وذات درجة حرارة ثابتة بحيث يتم تبادل الطاقة فيما بين هذه الجمل في الانسامبل. وعندما تم الشرط الذي يقول أن عدد مركبات كل جملة هو نفسه، ترموديناميكياً يمكن اعتبار كامل الانسامبل جملة متساوية درجة الحرارة. وعندما تصبح جميع الجمل في حالة توازن ~~[illegible]~~ يوضع الشكل التالي أن حدود الجمل تثبت عدد مركبات كل جملة وكذلك حجمها V الذي يعتبر هو نفسه لجميع الجمل، وعلى كل حال فإن طاقة الجملة لن تبقى ثابتة نظراً للتوزيع

V,T	V,T	V,T	V,T
V,T	V,T	V,T	V,T

الانسامبل القانوني أو خزان درجة الحرارة الثابتة

V,T	V,T	V,T	V,T
V,T	V,T	V,T	V,T
V,T	V,T	V,T	V,T
V,T	V,T	V,T	V,T

الانسامبل القانوني الكبير.

الحدود وامكانية انتقال الطاقة عبرها بسهولة. لذلك من الوجهة النظرية يكون ممكناً لـ طاقة الجملة ضمن الانسامبل القانوني أن تتغير مع الزمن على جميع قيم الطاقة الكلية للانسامبل من الصفر وحتى اللانهاية.

لتكن الجملة ضمن الانسامبل القانوني موجودة في الحالة i بطاقة قدرها E_i. تحدد هذه الحالة i بالقيم التي يأخذها N جسيم في الجملة وعددها $6N$ احداثي للاندفاع والموضع.

ان احتمالية وجود الجملة في الحالة i بطاقة قدرها E_i يمكن ايجاده اذا عالجنا الجملة على انفراد في الانسامبل كالمكافئة هي نفسها مركبات الجملة الكبرى. في هذه الحالة ستكون الجملة الاضخم عبارة عن انسامبل قانوني ذي طاقة ودرجة حرارة ثابتتين.

ان احتمال وجود جسيم من الجملة في الحالة i هو

$$P_i = P_0 \, e^{-E_i/KT} \quad (1)$$

حيث P_0 يتبع درجة الحرارة.

وبما أن الجملة يجب أن تكون في احدى الحالات التي يشار اليها بالدليل i اذن

$$\sum_i P_i = 1 \quad (2)$$

حيث يؤخذ المجموع على جميع الحالات الممكنة i والتعويض في العلاقة (1) نجد

$$P_0 \sum_i e^{-E_i/KT} = 1$$

وبتبسيطه نحصل على P_0 وهي على النحو التالي.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_i e^{-E_i/KT}} \quad (3)$$

لنعرف تابع التقاسم (المجموع الاحصائي) العائد لنسخ الانسامبل القانوني كما يلي.

$$Z = \sum_i e^{-E_i/KT} \quad (4)$$

وباستخدام المعادلات (1) و (3) و (4) يمكننا ايجاد احتمال وجود الجملة في الحالة i وفق العلاقة

$$P_i = \frac{e^{-E_i/KT}}{Z} \quad (5)$$

- لندرس الآن الخواص الترمودينامكية للانسامبل القانوني.

لنعتبر الآن أن حالات الطاقة المسموحة للجملة في الانسامبل القانوني هي القيم المختلفة لـ E_i، عندئذ تعطى المجموع الطاقة الوسطى للجملة

$$\overline{E} = \sum_i P_i E_i \quad (6)$$

باستخدام قيمة P_i من العلاقة (5) تصبح العلاقة 6 عند درجة حرارة T على النحو التالي.

$$\bar{E} = \frac{1}{Z}\sum_i \left(e^{-E_i/KT}\cdot E_i\right) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} \quad \sum_i \left(e^{-E_i/KT}\cdot E_i\right)$$

لا نأخذ مشتقة Z

وباعتبار أن

$$\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{KT}\right)}\left(\sum_i e^{-E_i/KT}\right) = KT^2\frac{\partial Z}{\partial T} \qquad \frac{E_i}{KT^2}\sum e^{\frac{-E_i}{KT}}$$

فإن

$$\bar{E} = \frac{1}{Z}KT^2\frac{\partial Z}{\partial T} \Rightarrow \bar{E} = KT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \qquad (8)$$

ويمكن كتابة العلاقة بين الطاقة الحرة F والطاقة E للجسم حسب قوانين الثرموديناميك على النحو التالي:

$$E = -T^2\left[\frac{\partial\left(\frac{F}{T}\right)}{\partial T}\right]_V$$

فإذا استبدلنا ذلك في المعادلة (8) نحصل على

$$\frac{\partial(F/T)}{\partial T} = -K\frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

وتصبح الطاقة الحرة مساوية

$$F = -KT\ln Z + C \qquad (9)$$

حيث أن C ثابت مستقل عن درجة الحرارة. وإذا استعنا بالعلاقتين $F = E - TS$ و $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ أن تعطيان قيمة غير مبهمة (واحدة) للانتروبية (S) عند استخدام المعادلتين (8) و (9) فمن الضروري أن يكون ثابت التكامل C مساوية للصفر. عندئذ تصبح الطاقة الحرة للنظام هي

$$F = -KT\ln Z \qquad (10)$$

وهذه النتيجة متوافقة مع ما تم ذكره سابقاً حيث يمكننا كتابة المعادلة (10) على النحو التالي

$$Z = e^{-F/KT} \qquad (11)$$

بحيث يصبح تعبير الاحتمال الوارد في المعادلة (5) مساوياً.

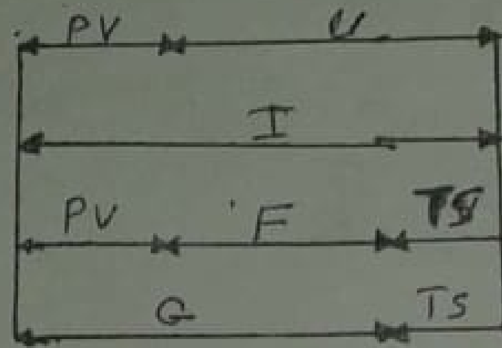
$$P_i = e^{\frac{F-E_i}{KT}} \qquad (12)$$

تؤخذ هذه العلاقة في بعض الأحيان كتعريف للأساس القانوني وهي ليست سوى توزيع جيبس

وبكلام آخر، اذا كان احتمال وجود الجملة في الحالة i بطاقة قدرها E_i يعطى وفقه العلاقة (12) عندئذ يقال أنها عضو في الانسامبل القانوني.

ملاحظة: لمعرفة التوابع الترموديناميكية نقترح علاقة هذه التوابع مع بارامتراتها المميزة فنجد:

$U = U(S,V)$ الطاقة الداخلية ، $I = I(S,P)$ الانثالبية ، $F = F(T,V)$ الطاقة الحرة ، $G = G(T,P)$ الكمون الترموديناميكي



الكمون الترموديناميكي الكبير γ.

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= U - ST - \mu N \\ \gamma &= F - G \end{aligned}\right\} = -PV$$

(μ هو الكمون الكيميائي)

وأيضاً $G = \mu N$ و $F = G - PV = U - TS$

- الانسامبل القانوني الكبير (المجموع القانوني الكبير):

حتى الآن كانت الجمل المدروسة تحوي عدداً ثابتاً من الجزيئات، أي أن مكونات الجملة تتبادل الطاقة فيما بينها فقط، أي أنها مغلقة. الآن سنعالج الجمل المفتوحة مع بعضها البعض بحيث أن مكونات الجملة (أي عدد الجزيئات) ليس ثابتاً ولكن الحجم ودرجة الحرارة العائدين لكل جملة يكونان ثابتين وما عدا ذلك فإن الطاقة والجزيئات يتم تبادلها وطالما أن عدد الجزيئات غير ثابت فهذا يؤثر على التوابع الترموديناميكية العائدة لهذه الجمل المفتوحة.

- تابع المجموع الاحصائي الكبير (تابع التجامع).

تتحدد حالة الجملة α في الانسامبل القانوني الكبير بدلالة الطاقة E_α وعدد الجزيئات N_α التي تحويها هذه الجملة ويكون احتمال وجود الجملة W_α في الحالة α ثابتاً لكل من الطاقة وعدد الجسيمات.

$$W_\alpha = e^{\frac{(\gamma + \mu N - E_\alpha)}{\theta}} \qquad (13)$$

حيث μ و γ و θ توابع ترموديناميكية غير معرفة. وبمقارنة هذه العلاقة مع علاقة W_α في حالة الانسامبل القانوني (12) حيث رمزنا صاب P_i

$$W_\alpha = e^{\frac{F - E_\alpha}{KT}}$$

حيث أن $F = \gamma + \mu N$ و $\theta = KT$

وباعتبار أن $(F = \mu N - PV)$ و $(\gamma = F - G = -PV)$ فإنه يمكننا أن نقرن γ والذي يعرف بالكمون الترمودينامیکي الكبير بـ $(-PV)$.

فيصبح احتمال وجود الجملة α ذات الطاقة E_α على النحو التالي.

$$\text{(14)} \quad \omega_\alpha = e^{\frac{[-PV + (\mu N - E_\alpha)_\alpha]}{KT}}$$

وباستخدام شرط التنظيم $\sum_\alpha \omega_\alpha = 1$ للمعادلة (14) نحصل على.

$$e^{\frac{-PV}{KT}} \sum_\alpha e^{\frac{(\mu N - E)_\alpha}{KT}} = 1$$

عندئذ يكون لدينا.

$$\text{(15)} \quad e^{\frac{-PV}{KT}} = \frac{1}{\sum_\alpha e^{\frac{(\mu N - E)_\alpha}{KT}}} = \frac{1}{\Phi}$$

حيث Φ تابع المجموع الكبير (تابع التقسيم الكبير) ويعطى بالعلاقة.

$$\text{(16)} \quad \Phi = \sum_\alpha e^{\frac{(\mu N - E)_\alpha}{KT}}$$

ويمكن أن نرمزله بالرمز Z بدلاً من Φ.

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (14) على النحو التالي.

$$\text{(17)} \quad \omega_\alpha = \frac{e^{\frac{(\mu N - E)_\alpha}{KT}}}{\Phi}$$

- استخدام المجموع الاحصائي الكبير لاشتقاق التوابع الترمودیناميكية دورة.

لدينا الكمون الترمودینامیکي الكبير

$$\gamma = U - ST - \mu \bar{N} \quad (U = E), \ \gamma = -PV$$

إذن

$$\text{(18)} \quad PV = TS + \mu \bar{N} - E$$

حيث $\bar{N}$ متوسط عدد الجمل الجزئية من النسخة، وبإجراء التفاضل لـ PV نحصل على

$dU = Tds - PdV + \mu dN$ للديناميك الترمودیناميك.

لذلك فإن

$$\text{(19)} \quad d(PV) = SdT + PdV + Nd\mu$$

~~$d(PV) = d(TS) + d(\mu N) - dE = SdT + \mu dN$~~

وبالتالي تصبح المشتقات الجزئية والتي تعطي المقادير الثرموديناميكية

$$(20)\quad P=\left[\frac{\partial(PV)}{\partial V}\right]_{T,\mu} \;;\; S=\left[\frac{\partial(PV)}{\partial T}\right]_{V,\mu} \;;\; N=\left[\frac{\partial(PV)}{\partial \mu}\right]_{T,V}$$

ويمكن ان نكتب هذه المتحولات بدلالة المجموع الاحصائي الكبير Φ اعتماداً على المعادلة (15) يمكن كتابة الجداء PV كالتالي.

$$(21)\quad P.V=KT\ln\Phi$$

فمثلاً يمكن كتابة الانتروبية وعدد الجسيمات من المعادلة (20) على النحو التالي.

$$S=KT\left[\frac{\partial\ln\Phi}{\partial T}\right]_{V,\mu} \;,\; \bar{N}=KT\left[\frac{\partial\ln\Phi}{\partial \mu}\right]_{T,V}$$

توزيع فيرمي - ديراك

تعطى الحالة المتوازنة للغاز المثالي بدقة تامة اذا حددنا عدد الجسيمات n_α الواقعة في كل حالة α. وبما أنه في شروط التأثيرات المتبادلة الضعيفة لذرات الغاز N فإن الحديث يدور حول القيم المتوسطة $\bar{n}_\alpha$، فإن قيم n_α تتغير دائماً.

لحساب $\bar{n}_\alpha$ نستخدم التوزيع القانوني الكبير لجيبس من أجل الجملة الجزئية المؤلفة من جميع ذرات الغاز والواقعة في الحالة الكوانتية α، وتشكل بقية كتلة الغاز الخزان الحراري.

يعطى احتمال وجود الجملة الجزئية التي تحوي n جسيم وتملك طاقة ε بالعلاقة التالية

$$W(\varepsilon,n)=\frac{\Omega(\varepsilon,n)\,e^{\frac{\mu n-\varepsilon}{KT}}}{\sum\limits_{\varepsilon}\sum\limits_{n}\Omega(\varepsilon,n)\,e^{\frac{\mu n-\varepsilon}{KT}}}$$

وبما أن جميع الجسيمات في الحالة α لها الطاقة نفسها ε_α فإن طاقة الجملة الجزئية تتحدد بعدد الجسيمات n. أي

$$(22)\quad \varepsilon=n.\varepsilon_\alpha$$

عدا عن ذلك فإن هناك n جسيم من N امكانية تدخل في الجملة الجزئية المدروسة. ومن جراء عدم تمايز الجسيمات فإن حالة واحدة للجملة الجزئية تتطابق مع أي مجموعة مؤلفة من n ذرة، لذلك فإن

$$\Omega(\varepsilon,n)=\Omega(n)=1$$

ومن هنا ينتج أن

$$(23)\quad W(\varepsilon,n)=W(n)=\frac{e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}n}}{\sum e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}n}}$$

وبالاعتماد على (23) يكتب المجموع الاحصائي الكبير على النحو التالي

$$\Phi = \sum_n e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT} n}$$

لذلك فإن العلاقة

$$\bar{n} = KT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT} n} \quad (24)$$

او بشكل مختصر

$$\bar{n} = KT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n X^n \quad (25)$$

حيث $X = e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}}$

لحساب المجموع في العلاقة (25) يجب معرفة حدود تغير عدد الجسيمات في الحالة الجزيئية. ان أدنى قيمة لـ n هي الصفر، أما الكبرى فتتعلق بنوعية الجسيمات المدروسة (فيرميونات، بوزونات). فإذا كانت الجسيمات التي تكون الغاز المثالي عبارة عن فيرميونات. فإنه لا يوجد في أية حالة كوانتية أكثر من جسيم واحد لذلك.

$$\bar{n}_\alpha = KT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n=0}^{1} X^n = KT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}}\right)$$

وبالتالي فإن

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha-\mu}{KT}}+1} \quad (26)$$

تسمى الصيغة 26 بتوزيع فيرمي - ديراك.

* **توزيع بوزه - اينشتاين**

لدينا في توزيع بوزه - انشتاين لا يعتبر عدد البوزونات في أية حالة محدوداً أي $n_{max} = N$ فإذا كانت $N \gg 1$ فإننا نعتبر في الحسابات $n_{max} = \infty$ (إن مجموع $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$ يكون ممكناً في حال كون $X < 1$. وبما أن $\varepsilon_\alpha > 0$ لذلك يجب ان يكون $\mu \leq 0$. وعندئذ هذه الشروط محققة دائماً وتتبعها مساهمة الحدود في السلسلة (25) عند قيم n الكبيرة، صغيرة لدرجة الاهمال. عندئذ فإن المجموع في (25) يتحول الى متتالية هندسية لامتناهية حدها الأول 1. وأساسها X، حيث نعطي مجموعها بالعلاقة التالية.

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$$

نعوض قيمة X فنجد

$$\frac{1}{1-X} = \frac{1}{1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}}}$$

ومن هنا نجد أن

$$\bar{n}_\alpha = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha-\mu}{KT}}-1} \quad (27)$$

تسمى هذه العلاقة - توزيع بوزه - انشتاين.

اذا اتى بالامتحان علينا ان نشتق العلاقة (25) ثم نكتب هذا.

المؤثرات الكمية :
المؤثرات الخطية :

١- ان الميكانيك الكمي هو نظرية خطية، فلو نظرنا بإمعان الى مبدأ جمع الحالات نجد انه يبين ان مجموعة من التوابع الموجية التي تصف مجموعة من الحالات الممكنة لنظام فيزيائي ما يمكن جمعها خطياً لنعطي تابع موجي جديد يصف حالة جديدة لنفس النظام (لكون معادلة شرودينغر هي معادلة تفاضلية خطية)، ومثال عن ذلك الجمع الخطي لعدد غير محدود من الموجات ذات الطول الموجي الواحد للحصول على الحزمة الموجية . وقد عرفنا ان التابع الموجي يحتوي في تركيبه كل الخواص المحتملة للنظام الموصوف به . لذلك يصبح من مهام النظرية الكمية وضع اسلوب رياضي لاستخلاص المعلومات من هذا التابع .

ان العوامل الرياضية التي تستعمل لتحقيق هذا الغرض تسمى المؤثرات . والمؤثر هو عامل رياضي يجري عملية رياضية من نوع معين على تابع ما فيغير طوره أو يحوله الى تابع جديد ليس له أي علاقة بالتابع الاصلي. فلو كان A مؤثراً رياضيا فانه من الممكن ان تكون لدينا العلاقة الآتية

$$\Psi(x) = A\,\Phi(x) \qquad (1)$$

اذ أن $\Phi(x)$ أي تابع أثر عليه المؤثر A محوله الى التابع الجديد $\Psi(x)$ وكمثال بسيط على ذلك نفرض أن $A = \frac{d}{dx}$ ، وتعني ان تأثير A على اي تابع هو ايجاد مشتقه بالنسبة للمتغير x وعليه فان $\Psi(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x)$ أي أن $A\Phi(x)$ ليس عملية ضرب A بـ $\Phi(x)$ وانما تأثير A مع $\Phi(x)$ وللزيادة التوضيح نفرض ان A يؤثر على حاصل ضرب تابعين فانه

$$\frac{d}{dx} f\cdot g = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}$$

او بصيغة المؤثرات

$$\hat{A}(f\cdot g) = g\hat{A}f + f\hat{A}g \qquad (2)$$

ان المعادلة (2) تصبح في هذه الحالة محققة لذلك يسمى المؤثر $\hat{A}$ خطياً ، اذا كان

$$(3) \qquad 1.\ \hat{A}(\Psi_1+\Psi_2) = \hat{A}\Psi_1 + \hat{A}\Psi_2$$
$$2.\ \hat{A}(c\Psi) = c\hat{A}\Psi$$

حيث c كمية ثابتة ويمكن ان تكون معقدة .

اذا كان $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مؤثرات خطية بحيث $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ فيصح كذلك ان نكتب $\hat{C} = \hat{B} + \hat{A}$. وهذا يعني ان تأثير المؤثر $\hat{C}$ على اي تابع يكافئ مجموع تأثير كل من $\hat{A}$ و $\hat{B}$ على هذا التابع اي ان

$$\hat{C}\Psi = \hat{A}\Psi + \hat{B}\Psi \qquad (4)$$

اضافة لذلك فان المؤثرات الخطية تخضع لخاصية التوزيع .

$$[\hat{A}(\hat{B} + \hat{C})]\Psi = \hat{A}\hat{B}\Psi + \hat{A}\hat{C}\Psi \qquad (5)$$

وهنا يجب أن نشير الى أنه المقصود بالعلمية $\hat{A}\hat{B}\Psi$ هو تأثير $\hat{B}$ على Ψ أولاً ومن ثم تأثير $\hat{A}$ على ناتج العملية الأولى ومن هنا يكون لدينا بصورة عامة أن $\hat{A}\hat{B}\Psi \neq \hat{B}\hat{A}\Psi$ (6)

٣- التوابع والقيم الذاتية:

لنفرض أنه لدينا تابع Φ يؤثر عليه المؤثر $\hat{A}$ حيث يحوله الى تابع آخر Ψ $\hat{A}\Phi = \Psi$.
بصورة عامة Ψ تابع جديد ليس له علاقة مع Φ ولكن توجد حالة خاصة ومهمة وهي:

$$\hat{A}\Phi = \alpha\Phi \quad (7)$$

حيث أن α مقدار عددي. أي أن تأثير $\hat{A}$ في Φ ليس تابعاً جديداً، ولكن نفس التابع مضروب بكمية ثابتة. وفي هذه الحالة تسمى Φ تابع ذاتي (دالة ذاتية) للمؤثر $\hat{A}$ و α هي القيمة الذاتية المرافقة له. والأمثلة عن هذا النوع كثيرة منها: $\hat{A} = \frac{d}{dx}$ و $\Phi = e^{kx}$ كما في:

$$\hat{A}\Phi = \frac{d}{dx}e^{kx} = k e^{kx} = k\Phi$$

أي أن Φ تابع ذاتي للمؤثر $\hat{A}$ لقيمة ذاتية k:

ويلاحظ أنه في حال كون المؤثر $\hat{A}$ مؤثراً تفاضلياً خطياً فإن المعادلة $\hat{A}\Psi = \alpha\Psi$ تعتبر عبارة عن معادلة تفاضلية خطية، والمعادلة التفاضلية لها حلول كثيرة ولكن معظم تلك الحلول ليس لها مدلول فيزيائي، ولكي نجد أي من هذه الحلول له معنى (مدلول) فيزيائي فإننا نفرض شروطاً خاصة على هذه الحلول تنسجم مع طبيعة النظام الكمي ونأخذ منها ما تنطبق عليه الشروط ونترك الباقي على أنه غير مقبول فيزيائياً. وتسمى هذه الشروط بالشروط الحدودية.

٤- المؤثرات الهرميتية:

ليس المؤثر $\hat{A}$ هيرميتياً إذا احقق العلاقة التالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \hat{A} \Psi_2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (A\Psi_1)^* \Psi_2 \, dx \quad (8)$$

لنبين الآن فيما إذا كان $\hat{A} = \frac{d}{dx}$ مؤثراً هيرميتياً.

لنعوض عن $\hat{A}$ في الطرف الأيسر من المعادلة 8 فنحصل على العلاقة التالية:

$$\int \Psi_1^* \frac{d}{dx} \Psi_2 \, dx = \left[\Psi_1^* \Psi_2\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\Psi_1^*}{dx}\right) \Psi_2 \, dx$$

(هنا حصلنا على الطرف الأيمن باستعمال التكامل بالتجزئة حيث فرضنا أن

$$u = \Psi_1^*, \quad v = \Psi_2 \} \quad du = \frac{d\Psi_1^*}{dx}dx, \quad dv = \frac{d\Psi_2}{dx}dx$$

عبارة التكامل بالتجزئة

$$\left(\int u\,dv = [uv] - \int v\,du\right)$$

الآن

لذلك فإن

$$\int \Psi_1^* \frac{d}{dx} \Psi_2 \, dx = -\int \left(\frac{d}{dx}\Psi_1^*\right) \Psi_2 \, dx$$

$\frac{d}{dx}$ لا يحقق المعادلة (8) وبذلك فهو مؤثر غير هيرميتي.

نستطيع بنفس الأسلوب أن نثبت أن المؤثر $-i\hbar\frac{d}{dx}$ هو مؤثر هيرميتي.

برهنة: القيم الذاتية لمؤثر هيرميتي حقيقية دائماً.

لنفرض أن $\psi_i(x)$ هي احدى التوابع الذاتية للمؤثر الهيرميتي $\hat{A}$ وأن a_i هي قيمته الذاتية الموافقة له أي أن:

$$\hat{A}\psi_i(x) = a_i \psi_i(x) \quad (9)$$

لنأخذ المرافق المعقد (العقدي) لهذه المعادلة

$$\hat{A}^*\psi_i^*(x) = a_i^*\psi_i^*(x) \quad (10)$$

نضرب المعادلة (9) من اليسار بالتابع ψ_i^* ونضرب المعادلة (10) من اليمين بالتابع ψ_i والتكامل على كل القيم المقبولة للمتغير x فنحصل على

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \hat{A} \psi_i \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a_i \psi_i^* \psi_i \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^* \psi_i^* \psi_i \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a_i^* \psi_i^* \psi_i \, dx$$

وبما أن $\hat{A}$ مؤثر هيرميتي بالفرض فإن الطرف الأيسر من المعادلتين الأخيرتين متساويان وعليه يتساوى الطرف الأيمن فنحصل على معادلة أي أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_i \psi_i^* \psi_i \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a_i^* \psi_i^* \psi_i \, dx \Rightarrow (a_i - a_i^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \psi_i \, dx = 0 \quad (11)$$

وبما أن التكامل في العلاقة (11) لا يساوي الصفر إذن فإن $a_i - a_i^* = 0$ ومنه $a_i = a_i^*$

وهذا يعني أن a كمية حقيقية.

٤- التوابع المشتركة لأكثر من مؤثر - أقواس التبادل

اذا كان $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مؤثرين خطيين وأن التابع ψ يحقق المعادلتين:

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi \quad \text{و} \quad \hat{B}\psi = \beta\psi$$

فإن التابع ψ هو دالة ذاتية مشتركة للمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ في آن واحد.

لنؤثر بالمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ على التابع ψ بصورة متعاقبة كالآتي:

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}(\alpha\psi) = \alpha\hat{B}\psi = \alpha\beta\psi \quad (12)$$

ولو عكسنا عملية التأثير نحصل على

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}(\beta\psi) = \beta\hat{A}\psi = \beta\alpha\psi \quad (13)$$

بطرح المعادلة (13) من (12) نحصل على

$$(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\psi = (\beta\alpha - \alpha\beta)\psi$$

أي أن

$$(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\psi = 0 \quad (14)$$

وهذه العلاقة نكتب اختصاراً (اصطلاحاً)

$$[\hat{B}\hat{A}]\psi = 0$$

يسمى [؟ ، ؟] بقوس التبادل للمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$. ان أقواس التبادل تخضع للقواعد الجبرية الآتية

$$[\hat{A}.\hat{B}] = -[\hat{B}.\hat{A}]$$

$$[\hat{A}.\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}.\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}.\hat{C}]$$

$$[\hat{A}\hat{B}.\hat{C}] = [\hat{A}.\hat{C}]\hat{B} + A[\hat{B}.\hat{C}]$$

$$[\hat{A}.[\hat{B}.\hat{C}]] + [\hat{B}.[\hat{C}.\hat{A}]] + [\vec{C}.[A.B]] = 0$$

ويسمى أي مؤثرين يحققان المعادلة (14) بالمؤثرين المتبادلين، وبعبارة أخرى، انما أي مؤثرين لها تابع ذاتي مشترك متبادلان.

اذ أن الدوال الذاتية u_n تمثل المتجهات الاساسية المتعامدة (تقابل $\vec{e}_n$) و c_n هي بمثابة مساقط الدالة $\psi(\vec{r})$ على u_n المختلفة (هنا يكون مفهوم المسقط ليس دقيقاً تاماً بالنسبة للدالة، لأن المتجه له قيمة واحدة بينما يكون للدالة عدد غير محدود من القيم ولذلك فالاصح استعمال مصطلح اسهام u_n في $\psi(\vec{r})$.

تسمى مجموعة الدوال الاساسية u_n مجموعة كاملة اذا تحقق الشرط الآتي.

$$\lim \left[\psi(\vec{r}) - \sum_{n=1}^{m} c_n u_n(\vec{r}) \right] = 0$$

في الفضاء الثلاثي نستطيع دائماً ايجاد مقادير قابلة للقياس باستعمال خاصية الضرب العددي فان طول المتجه نجده من العلاقة.

(*) $|\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ أو $|\vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$

اي أننا لا نستطيع ايجاد كميات مقاسة عملياً الا بعد اجراء الضرب العددي. لذلك يصبح من الضروري تعريف علاقة لحساب ناتج الضرب العددي لدالتين في فضاء هلبرت. ان ذلك يعرف كالآتي

$$(\psi_1 \cdot \psi_2) = \int \psi_1^*(x)\, \psi_2(x)\, dx$$

ولقد سبق ان أشرنا الى أن الدوال الاساسية في فضاء هلبرت هي دوال متعامدة وذلك لكي تأخذ محل $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ في الفضاء الثلاثي؛ والواقع فانه لكي تكون متعامدة يجب ان تكون دوالاً لمؤثر هرميتي معين. أو بعبارة أخرى اذا كانت الدوال الاساسية دوالاً ذاتية لمؤثر هرميتي معين فهي دوال متعامدة. لنبرهن ذلك على النحو التالي.

نفرض الدوال الاساسية u_n هي دوال ذاتية لمؤثر هرميتي $\hat{A}$.

① $\hat{A} u_n = a_n u_n$

② $\hat{A} u_m = a_m u_m$

وحيث نفرض أن $a_n \neq a_m$

نضرب المعادلة الأولى بالدالة u_m^* ونكامل على كل الفضاء:

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* \hat{A} u_n\, dx = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n\, dx$$

لنأخذ المرافق العقدي للمعادلة ② فنحصل على

$$\hat{A}^* u_m^* = a_m^* u_m^* = a_m u_m^*$$

وذلك لأن a_m مقدار حقيقي، وذلك لكونه قيمة ذاتية لمؤثر هرميتي. لنضرب المعادلة الأخيرة من اليمين بالدالة u_n ونكامل.

④ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^* u_m^* u_n\, dx = a_m \int u_m^* u_n\, dx$$

وبما ان $\hat{A}$ مؤثر هرميتي، لذلك فان الطرف الايسر من المعادلة ③ يساوي الطرف الأيسر من المعادلة ④ وعليه فان

$$a_m \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n\, dx = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n\, dx$$

أو

$$(a_m - a_n) \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n\, dx = 0$$

وبما أن $a_m \neq a_n$ فان

(٥) $$\int_{-\infty}^{\infty} u_m^* u_n \, dx = \delta_{mn} = 0$$

نستنتج أن u_m و u_n متعامدان لأن الضرب العددي لأي متجهين متعامدين يساوي صفراً.

- رموز ديراك:

لقد أدخل ديراك بعض الصيغ الرياضية المختصرة لوصف العمليات الرياضية في الميكانيك الكمي واختزال الخطوات الرياضية بشكل كبير. فمن المعروف في الفيزياء الكلاسيكية أن استعمال المحاور الإحداثية المتعامدة $\vec{e}_n$ كان كافياً لوضع الإطار الرياضي الكامل لمعالجة معظم المسائل المطروحة الآن أنه بعد الاطلاع على مبدأ جمع الحالات (هو أحد المبادئ الأساسية في الميكانيك الكمي) وجد أنه من الضروري تقسيم الفضاء الثلاثي إلى فضاء غير محدود وعموماً أطلقنا عليه اسم فضاء هلبرت، حيث أن كل محور في فضاء هلبرت اللامتناهي يمثل دالة ذاتية أو دالة أساسية. ولقد أدخل ديراك الرمز ($|\rangle$) للتعبير عن أية متجه حالة. فمتجه الحالة ψ يكتب بشكل $|\psi\rangle$ ويسمى الرمز $|\rangle$ Ket. وعليه تطبيق مبدأ جمع الحالات على هذه الرموز بالصورة الآتية.

$$\mu_1|\psi_1\rangle + \mu_2|\psi_2\rangle = |\psi\rangle$$

إذ أن $|\psi\rangle$ هي دالة موجية عبارة عن جمع خطي من ψ_1 و ψ_2. وهناك رمز آخر يستخدم لتمثيل الدالة ψ^* وهو $\langle|$ ويسمى Bra بحيث نكتب ψ^* مع الشكل الآتي $\langle\psi|$. وباستعمال هذه الصيغ نستطيع أن نمثل مربع طول أي متجه بالشكل الآتي.

$$|A|^2 = \langle A|A\rangle$$

إذ أن A متجه في فضاء هلبرت وعليه تكون الصيغة الجديدة للمعادلة السابقة كما يأتي (★)

$$\int \psi_1^*(x)\, \psi_2(x)\, dx = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

ويسمى جمع الصيغتين $\langle|\rangle$ بـ Braket.

نستطيع الآن إعادة صياغة بعض العلاقات المهمة التي توصلنا إليها سابقاً وذلك باستعمال رموز ديراك. فلو كان كل من $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مؤثرات خطية فإن

$$\hat{A}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \hat{A}|\psi_1\rangle + \hat{A}|\psi_2\rangle$$

وكذلك

$$(\hat{A}+\hat{B})|\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{B}|\psi\rangle$$

وإذا كانت ψ دالة قياسية فإن

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

وإذا كان كل من $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ هي دوال ذاتية لمؤثر هيرميتي في فضاء

هلبرت خاص $\langle \psi_\ell | \psi_m \rangle = \delta_{\ell m}$

والقيمه المتوقعه لذي مؤثر $\hat{A}$ ستكون $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

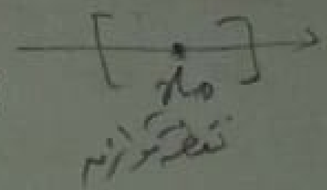
بينما يكون شرط المؤثر الهرميتي هو: $\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \hat{A} \psi_1 | \psi_2 \rangle$.

وصف لبعض العلاقات المهمه الأخرى مثل داله ديراك . والتي يمكن تمثيلها بدلالة مجموعه كامله $\{\psi_i\}$: . تعتبر داله ديراك $\delta(x'-x)$ داله خاصه ونعرفها منطقيا بالعلاقتين

$$\delta(x'-x) = 0 \qquad x' \neq x$$

$$f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' = f(x)$$

أو بعبارة أخرى ـــــ



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x'-x)\,dx' = 1$$

$$\int^{+\infty} f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' = f(x)$$

ان الشكل الهندسي لتابع دلتا ديراك غير محدد، ويمكن تصوره بأي منحني ذو عرض لامتناهي في الصغر وارتفاع لامتناهي في الكبر بحيث تعتبر مساحته مساويه للواحد. ويمثل هذا التابع تصوراً "جيداً" عن كثافة الاحتمال في الحاله التي يكون فيها للقيمه x قيمه محدده واحده x'

فمثلاً في مجال اختياري dx والذي لا يحتوي النقطه x_0 مثلاً فان الاحتمال $|W(x)|$ يساوي الصفر لذلك فان $f(x)=0$. وعموماً في أي مجال لامتناهي في الصغر بحيث يحتوي النقطه x_0 فانه $dW(x)$ يساوي الواحد.

وبهذا الشكل فانه كثافة الاحتمال أو تابع التوزيع للمقدار الذي يأخذ قيمه محدده x_0 يكتب على النحو الاتي:

$$f(x) = \delta(x - x_0)$$

ـ المؤثر الهاملتوني :

لنشير في البدايه الى أن معادله شرودينغر يمكن كتابتها على النحو التالي:

١- المعادله المعتمده على الزمن وبعد واحد

$$① \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

٢- المعادله غير المعتمده على الزمن

$$② \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0$$

ويعلم من الميكانيك الموجي الكلاسيكي بأن معادلة الموجة الكلاسيكية تعطى بالعلاقة التالية

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3)$$

بعد الأخذ بالمؤثر الهاملتوني، يمكن اعادة كتابة معادلة شرودينجر غير المعتمدة على الزمن على النحو الآتي

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (4)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi = E\psi \quad (5)$$

من الميكانيك الكلاسيكي نعرف دالة هاملتون لنظام محافظ على أنه مجموع الطاقة الحركية والكامنة للنظام أي

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + V(x) \quad (6)$$

ان المعادلة (5) متطابقة مع المعادلة (6) اذا ان $-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}$ يمثل مربع مؤثر الزخم، وعليه نعرف المؤثر الهاملتوني في الميكانيك الكمي كالآتي.

$$\hat{H} \rightarrow \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \hat{V}(x) \quad (7)$$

المؤثر الهاملتوني

$$\hat{H} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}(x) \quad (8)$$

وعليه يمكن كتابة $\hat{H}$ للجسيم الحر بالشكل التالي:

$$\hat{H}_0 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \quad (9)$$

أي عند انعدام الإلكترون الحر

وبالتالي يمكن أن ننظر الى المعادلة (4) على أنها معادلة قيم ذاتية

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (10)$$

حيث أن ψ هي دالة ذاتية للمؤثر الهاملتوني بقيمة ذاتية E وهي الطاقة الكلية للجسيم.

وباستخدام العلاقة (10) ومعادلة شرودينجر المعتمدة على الزمن نستطيع أن نكتب.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = E\psi(x,t) \quad (11)$$

حيث أن $\psi(x,t)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ بقيمة ذاتية هي E (كمية ثابتة لا تتغير مع الزمن لأن النظام محافظ).

وعندما E لا تتغير مع الزمن فإنه يمكن فصل $\psi(x,t)$ الى دالتين $\psi(x,t) = \psi(x)f(t)$

وتعتمد $\psi(x)$ على دالة الجهد $V(x)$، بينما $f(t)$ تبقى كما هي بغض النظر عن صيغة الجهد

عندما يكون الجهد مشتقاً من قوة محافظة حسب العلاقة $F_x = \frac{-\partial V}{\partial x}$

مدارس كتابتها

وعليه سوف نحل المعادلة $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = E \cdot f(t)$

وعند بالتكامل

$$f(t) = N e^{-\frac{iE_n}{\hbar} t}$$

حيث N هو ثابت تحويل الدالة $f(t)$ إلى دالة عيارية (سوف لن نحسب قيمته في الوقت الحاضر...).
اذن نستطيع ان نفرض الآن أن طيف الطاقة للمؤثر الهاملتوني $\hat{H}$ لا يتغير مع الزمن لنفرض أننا حصلنا على الدالة الموجية وقيمتها الذاتية E_n لذلك

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

ولو أردنا حساب كثافة الاحتمال لهذه الحالة

$$P(x,t) = \psi_n^*(x,t)\,\psi_n(x,t) = \psi_n^*(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}\, \psi_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

مرافقه

(12) $$\Rightarrow P(x,t) = \psi_n^*(x)\,\psi_n(x)$$

وهي كمية لا تعتمد على الزمن مما يعني أن القيم المتوقعة للمتغيرات الديناميكية التي لا تحتوي على الزمن بصورة ظاهرة سوف لا تعتمد على الزمن. أي على اللحظة الزمنية التي تجرى فيها القياسات.

— مؤثر الزخم (الدفع الخطي).

ان الصيغة الرياضية لمؤثر الدفع هي

(13) $$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

وجوهرها انه تفاضل للمحور X ولا يعتمد على الزمن. فلو فرضنا أن $\psi(x)$ هي دالة ذاتية لهذا المؤثر فإن

(14) $$\hat{p}_x \psi(x) = p_x \psi(x)$$

أي أن

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = p_x \psi(x)$$

اذ أن p_x هي القيمة الذاتية لهذا المؤثر. ويمكن معالجة المعادلة الأخيرة بسهولة على النحو الآتي

(15) $$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} p_x \cdot x}$$

ان أهم ما نلاحظه عن هذا المؤثر هو أن القيمة الذاتية يمكن أن تأخذ أي قيمة كانت. لذا فإن تحقق المعادلة (15) أي أن قيم الدفع المقبولة تمثل طيف مستمر (متصل).
ان مؤثر الدفع يحقق أيضاً علاقات التبادل الآتية:

(16) $$[\hat{p}_x, \hat{H}_0] = 0$$

(17) $$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$$

أي أن الدالة (15) هي دالة ذاتية مشتركة لكل من مؤثر الدفع الخطي والمؤثر الهاملتوني للجسيم الحر. بينما لا توجد دالة ذاتية بين مؤثر الموقع $\hat{x}$ ومؤثر الدفع $\hat{p}_x$ إذ أن ذلك يعني من وجهة النظر الكمية امكانية قياس طاقة ودفع جسيم حر في وقت واحد لكن عدم امكانية قياس موقعه ودفعه في آن واحد.

مؤثر الازدواجية

يعرف هذا المؤثر كالآتي

(18) $$\hat{\pi}\psi(x)=\psi(-x)$$

أي أن ما ينتجه هذا المؤثر هو داله تحصل من تعويض $-x$ عن كل x في $\psi(x)$ وهذا المؤثر يكون خطياً لكنه وهو أيضاً مؤثر هرميتي. كما أنه يحقق خاصية التبادل مع المؤثر الهاملتوني. والبرهان على ذلك.

١- مؤثر خطي.

$$\hat{\pi}[\psi_1(x)+\psi_2(x)]=\psi_1(-x)+\psi_2(-x)$$

$$=\hat{\pi}\psi_1(x)+\hat{\pi}\psi_2(x)$$

كذلك $\hat{\pi}[c\psi(x)]=c\psi(-x)=c\hat{\pi}\psi(x)$.

٢- نثبت أن $\hat{\pi}$ هو مؤثر هرميتي.

لنأخذ الطرف الايسر من الشرط الهيرميتي. $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^*\hat{A}\psi_2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{A}\psi_1)^*\psi_2\,dx$

ولنأخذ مؤثر الازدواجية

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\pi}\psi(x))^*\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(-x)\psi(x)\,dx$$

والآن لنغير المتغيرات في التكامل مع الطرف الأيمن باستعمال التعويض الآتي $x'=-x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\pi}\psi^*(x))\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x')\psi(-x')\,dx.$$

حيث أن قيمة التكامل لا تتغير اذا ما غيرنا تعريف المتغيرات أي أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\pi}\psi^*(x))\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\hat{\pi}\psi(x)\,dx$$

وهذا يعني أن $\hat{\pi}$ هو مؤثر هيرميتي وأن قيمته الذاتية هي مقدار حقيقي. وهذا ما يجب أن يحصل فعلاً. فاذا ما لو أخذنا تأثير $\hat{\pi}$ على دالة الذاتية مرتين نحصل

$$\hat{\pi}^2\psi=\alpha\hat{\pi}\psi=\alpha^2\psi$$

حيث α هي القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{\pi}$.

الآن تأثير $\hat{\pi}$ على أي داله مرتين يعيدها الى حالتها الأولى وذلك لأننا نستبدل x بـ $-x$ مرتين أي أن $\alpha^2\psi=\psi$ وهذا يعني أن $\alpha^2=1$ أي $\alpha=\pm1$

أي أن القيمة الذاتية هي اما $+1$ أو -1، وتكون القيمة الذاتية $+1$ عندما تكون الدالة زوجية أي أن $\psi(x)=\psi(-x)$، وتكون القيمة الذاتية -1 عندما تكون الدالة فردية أي أن $\psi(x)=-\psi(-x)$

لنبرهن الآن أنه اذا كانت داله الجهد $V(x)$ داله زوجية بحيث يكون $V(x)=V(-x)$ فإن مؤثر الازدواجية يحقق خاصية التبادل مع المؤثر الهاملتوني.

دورى: وللبرهان على ذلك :

$$\hat{H}\Psi(x) = -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x)$$

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر $\hat{\pi}$ فنحصل على

$$\hat{\pi}H\Psi(x) = -\frac{h^2}{2m}\hat{\pi}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \hat{\pi}V(x)\Psi(x)$$

$$= -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\Psi(-x)}{dx^2} + V(-x)\Psi(-x)$$

$$= -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\Psi(-x)}{dx^2} + V(x)\Psi(-x) = \hat{H}\hat{\pi}\Psi(x)$$

وعليه فإن

$$(\hat{\pi}\hat{H} - \hat{H}\hat{\pi})\Psi(x) = 0$$

وبما أن هذه المعادلة تصح لأي دالة موجية إذن $[\hat{H}.\hat{\pi}] = 0$

وهذه المعادلة الأخيرة تصف التماثل في النظم الفيزيائية. إذ أن وصف النظم الفيزيائي لا يتغير عند التحويل x بـ $-x$

احسب الحقل المتولد عن الشحنة e^{a} f_{x_1}

الفصل الثاني .

المجال الكهربائي الساكن (المستقر) في الفراغ .

سوف ندرس الحقل (المجال) الكهربائي المستقر المتولد عن الشحنات الساكنة وذلك بدلالة تأثير شحنة كهربائية (شحنة الاختبار) لعدد من الشحنات القريبة منها والموجودة جميعاً في الفراغ . وسوف نبدأ بقانون كولوم (كولون) باعتباره قانوناً أساسياً تشتق منه القوانين الأخرى الخاصة بالكهرباء الساكنة .

- قانون كولوم Coulomb's Law .

ينص قانون كولوم على أن القوة بين شحنتين نقطيتين ساكنتين تتناسب طردياً مع حاصل ضرب هاتين الشحنتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما، ويكون خط التأثير لتلك القوة على استقامة الخط الواصل بين تلك الشحنتين، وتكون قوة تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين وقوة تنافر إذا كانت الشحنتان متشابهتين، ويمكن وضع صيغته الرياضية على النحو التالي :

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r \qquad (1)$$

حيث $\vec{F}$ تمثل القوة بين الشحنتين ، و Q_1 و Q_2 مقدار كل من الشحنتين النقطيتين ، و r هي المسافة بين الشحنتين و $\vec{u}_r$ هي متجه الواحدة على r ، أما K فهو مقدار ثابت يتعلق بجملة الواحدات المستخدمة وقيمته في الجملة الدولية هي

$$K = 9 \times 10^{9} \ \frac{\text{نيوتن} \times \text{متر}^2}{(\text{كولون})^2}$$

وقيمته في الجملة السغثية هي 1 (واحد) .

وتسهيلاً لبعض العلاقات الرياضية التي يستعمل فيها قانون كولوم ويظهر فيها العامل 4π . يعبر عن K بدلالة ثابت طبيعي آخر ε_0

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^{9} \ \frac{N \cdot m^2}{coul^2}$$

تسمى ε_0 سماحية الفراغ وقيمتها هي $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{Nm^2}$.

- شدة الحقل الكهربائي :

يعرف الحقل (المجال) الكهربائي بأنه الحيز من الفراغ الذي تظهر فيه آثار القوة الكهربائية على الشحنات الساكنة الموجودة في ذلك الحيز ، كما تعرف شدته في نقطة ما بأنها القوة المؤثرة على واحدة الشحنات في تلك النقطة ، وبذلك تكون شدة الحقل لشحنة نقطية Q في نقطة تبعد عنها مسافة r اعتماداً على العلاقة (1) كالآتي :

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \qquad (2)$$

وفي حال وجود عدد من الشحنات النقطية مثل $Q_1, Q_2, Q_3 --- Q_n$ والتي تبعد بالمسافات $r_1, r_2, r_3 --- r_n$ عن النقطة المراد حساب شدة الحقل فيها، فإن محصلة شدة الحقل هي المجموع المتجهي لشدة الحقل لكل من هذه الشحنات النقطية كل بانفراد في تلك النقطة، أي أن

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n \quad (3)$$

أما إذا كانت الشحنة موزعة توزيعاً حجمياً أو سطحياً أو طولياً فإننا نستعمل طريقة التكامل لإيجاد شدة الحقل على النحو الآتي:

$$\vec{E} = K \int \frac{dQ}{r^2} \vec{u}_r \quad (4)$$

وتعتمد فيه dQ على نوعية توزيع الشحنة، ففي حالة التوزيع الطولي فإن

$$dQ = \lambda \, dl \quad (5)$$

حيث λ هي كثافة الشحنة الطولية على ذلك الجسم و dl هو جزءاً تفاضلياً من طول الجسم l.

أما إذا كان توزيع الشحنة سطحياً فإنه

$$dQ = \sigma . ds \quad (6)$$

حيث σ هو كثافة الشحنة السطحية في ذلك الجسم و ds هي جزءاً تفاضلياً من ذلك السطح S.

وإذا كان توزيع الشحنة حجمياً فإنه

$$dQ = \rho \, d\tau \quad (7)$$

حيث ρ هي كثافة الشحنة الحجمية في ذلك الجسم و $d\tau$ هو جزءاً تفاضلياً من ذلك الحجم τ.

الجهد الكهربائي (الكمون الكهربائي):

عند إزاحة شحنة كهربائية مقدارها Q في حقل كهربائي E بحيث لا يؤثر وجودها على شكل الحقل أو مقداره، عند إزاحتها إزاحة تفاضلية مقدارها dl من نقطة a إلى نقطة b وبدون أن تتغير طاقتها الداخلية فإن العمل المنجز عليها هو

$$W = -\int_a^b Q \vec{E} . \vec{dl} \quad (8)$$

حيث تعني الإشارة السالبة هنا أن العمل قد أنجز ضد الحقل الكهربائي E، وعندما تكون حركة الشحنة على مسار مغلق يكون العمل المنجز

$$W = -\oint Q \vec{E} . \vec{dl} \quad (9)$$

لنحاول الآن إيجاد هذا التكامل، ولذلك نتصور أننا حركنا الشحنة Q في المجال الكهربائي لجسم ساكن مشحون وللسهولة نتصور أن هذا الجسم هو شحنة

نقطية مقدارها Q'، فإن العمل المنجز لتحريك الشحنة Q في مجال (حقل) الشحنة النقطية Q' حول طريق مغلق هو

$$W = -\oint \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r\cdot d\vec{l} = -\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0}\oint \frac{dr}{r^2} \qquad (10)$$

وإن مقدار هذا التكامل يساوي صفراً لأن ناتجه يساوي $(-\frac{1}{r})$ وإن حدي التكامل من بداية ونهاية المسار متساويان. وهذا يعني أن العمل المنجز عند تحريك شحنة نقطية مقدارها Q في الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية ساكنة Q' حول طريق مغلق يساوي صفراً. ويمكننا تعميم هذه القاعدة لجميع الأجسام المشحونة مهما كان شكل الجسم على اعتبار أن أي جسم مشحون يمكن تصوره مكوناً من عدد كبير جداً من الشحنات النقطية بشرط أن تكون هذه الشحنات ساكنة (مستقرة). وبذلك يمكن الاستنتاج أن العمل المنجز على واحدة الشحنات الواقعة في مجال كهربائي لشحنات مستقرة إذا حركت على طريق مغلق يساوي صفراً أي أن

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad (11)$$

وبهذا يكون المجال الكهربائي (الحقل الكهربائي) المستقر هو مجالاً محافظاً. وباستعمال نظرية ستوك فإن العلاقة (11) تتحول الى الشكل التالي:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad (12)$$

ولكنا نعرف من دراسة المتجهات فإن $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$ (مراجعة تحليل المتجهات). إذن فإن

$$\nabla\times\nabla\Phi = 0$$

إذن يمكن أن نعرف المجال (الحقل) بأنه الانحدار (التدرج) لدالة عددية وبهذا يكون:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \qquad (13)$$

حيث $\Phi(X,Y,Z)$ هو دالة مستمرة وأحادية القيمة وتسمى الجهد الكهربائي أو الكمون الكهربائي وتدل الإشارة السالبة في المعادلة (13) على أن اتجاه المجال الكهربائي يشير الى النقصان في الجهد (الكمون).

نشير هنا الى أن العلاقة (12) لا تصح إلا في حالة كون المجال الكهربائي هو مجالاً مستقراً (أي حقل ساكن) لا يتغير مع الزمن. أما إذا كان المجال الكهربائي متغيراً مع الزمن فإن $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ لا يكون مساوياً للصفر.

نحسب الآن مقدار العمل المنجز من قبل المجال الكهربائي $\vec{E}$ لإزاحة واحدة الشحنات

ازاحة تفاضلية مقدارها dl انتقالياً في المعادلة (13). ان هذا العمل يساوي

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = -\vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{dl} = -d\Phi \quad (14)$$

وان مقدار هذا العمل المنجز لنقل واحدة الشحنات من النقطة a الى النقطة b هو

$$\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_a^b d\Phi = \Phi_{ab} \quad (15)$$

أي ان فرق الجهد (فرق الكمون) بين النقطتين a, b هو مقدار العمل المنجز لنقل واحدة الشحنات من النقطة a الى النقطة b. فاذا كان العمل المنجز لنقل شحنة واحدة في مجال كهربائي من نقطة الى أخرى مساوياً صفراً" فان هاتين النقطتين تكونان متساويتي الجهد، أي ان فرق الجهد بينهما يساوي صفراً". واذا كان لدينا سطح جميع نقاطه متساوية الجهد فانه يقال عن هذا السطح بأنه سطح تساوي الجهد (سطح تساوي الكمون).

وتكون سطوح تساوي الجهد للشحنة نقطية من السطوح كروية متمركزة حول تلك الشحنة النقطية كمركز لها.

قانون غاوس.

لحساب شدة المجال الكهربائي المستقر في أي نقطة من الفراغ والناتج عن وجود شحنة أو شحنات نقطية يستعمل قانون كولوم. أما اذا كان توزيع الشحنة معقداً" فان شدة المجال في تلك النقطة لا يمكن حسابه بسهولة باستخدام قانون كولوم، ففي مثل هذه الحالات يستعمل قانون آخر يسمى قانون غاوس والذي ينص على أن عدد خطوط التدفق الكهربائي التي تقطع أي سطح مغلق يحيط بالشحنة مهما كان شكله يساوي الشحنة الموجودة داخل هذا السطح مقسومة على ϵ_0 (ثابت العزل الكهربائي للفراغ). وتكون صيغته على الشكل الآتي

$$\oint_s \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (16)$$

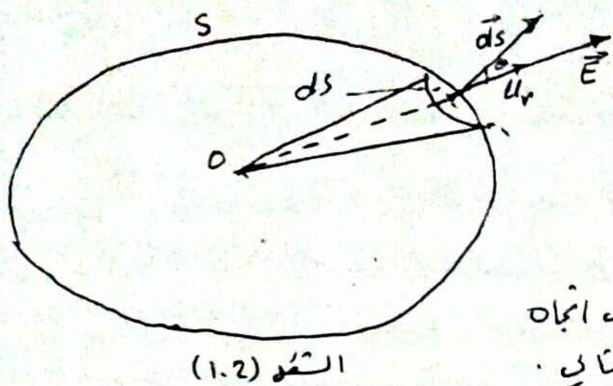
أما اذا كانت الشحنة تقع على السطح فان التدفق يصبح على النحو الآتي

$$\oint_s \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{2\epsilon_0} \quad (16')$$

حيث تمثل $\vec{E}$ شدة المجال في أي نقطة على السطح المغلق و ds هو العنصر التفاضلي من السطح المغلق S. ولإثبات العلاقة (16) نتصور التدفق الكهربائي خلال سطح مغلق S يحتوي على شحنة نقطية مقدارها Q في نقطة O كما في الشكل (1,2) ولحساب $\vec{E}$ في أي نقطة من هذا السطح المغلق نستعمل العلاقة (2)

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

ومقدار هذا التدفق الكهربائي خلال السطح تفاضلي مقداره (ds) في أي نقطة على السطح المغلق هو.



الشكل (1.2)

$$\vec{E}.\vec{ds} = KQ\,\frac{\vec{u}_r.\vec{ds}}{r^2} \qquad (17)$$

ولكن $\vec{u}_r.\vec{ds}$ هو مسقط المتجه $\vec{ds}$ على اتجاه المجال $\vec{E}$ أي أن $ds' = ds\cos\theta$. وبالتالي .

$$\vec{E}.\vec{ds} = KQ\,\frac{ds'}{r^2} \qquad (18)$$

ولكن $\frac{ds'}{r^2}$ هي الزاوية المجسمة $d\Omega$ التي يقع رأسها في النقطة o والتي من خلالها يمكن رؤية السطح ds. وبهذا نحصل على

$$\vec{E}.\vec{ds} = KQ\,d\Omega \qquad (19)$$

وبالتالي

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \oint KQ\,d\Omega = KQ\int d\Omega \qquad (20)$$

ولكن زاوية الفراغ (الزاوية المجسمة التي يمكن أن نرى الفراغ منها) هي 4π أي أن

$$\oint d\Omega = 4\pi \qquad (21)$$

وبالتعويض في العلاقة (20) بعد التعويض قيمة K بالمقدار $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ نحصل على

$$\int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q\,.4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad .(22)$$

نلاحظ من هذه العلاقة أن مقدار التدفق الكهربائي لا يعتمد على موقع الشحنة Q. وإذا كان هذا السطح المغلق يحتوي على أي عدد من الشحنات النقطية فإننا يمكن أن نتبع الطريقة نفسها لحساب التدفق لكل شحنة من الشحنات على حده ويكون التدفق الكلي هو مجموع التدفقات الخاصة بهذه الشحنات.

ويمكن استخدام قانون غاوس بالصيغة الرياضية (22) لإيجاد $\vec{\nabla}.\vec{E}$ مباشرة حيث يمكن كتابة الطرف الأيسر من المعادلة (22) وباستخدام مبرهنة غاوس (أو استروغرادسكي).

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \int_{\tau} \vec{\nabla}.\vec{E}.d\tau \qquad (23)$$

ويمكن كتابة الطرف الأيمن في الشكل الآتي.

$$\frac{Q}{\epsilon} = \int_{\tau} \frac{\rho.d\tau}{\epsilon_0} \qquad (24)$$

وبذلك تصبح المعادلة (22) على النحو الآتي.

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, d\tau \quad (25)$$

وبما أن هذه العلاقة تصح لنفس الحجم لذا يجب أن يتساوى المتكاملان من طرفي هذه المعادلة ولذلك فإننا نحصل على:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (26)$$

تمثل المعادلة (26) الصيغة التفاضلية لقانون كاوس وهي مكافئة تماماً للصيغة التكاملية (22).

معادلة بواسون ومعادلة لابلاس:

بتعويض قيمة $\vec{E}$ من المعادلة (26) بما يساويها من المعادلة (13) نحصل على

$$-\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$-\nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (27)$$

وهذه المعادلة التفاضلية هي معادلة بواسون، ويمكن استعمال هذه المعادلة التفاضلية لحساب Φ إذا عرفنا كلاً من ρ وبعض المعادلات الإضافية التي تسمى حالات الحدود (الحالات الحدية) في تلك المنطقة، كما يمكن استخدام هذه المعادلة أيضاً لحساب قيمة ρ في منطقة ما إذا عرفنا قيمة Φ في تلك المنطقة، وهناك حالات خاصة لمعادلة بواسون تنعدم فيها كثافة الشحنة في تلك المنطقة وتكون مساوية إلى الصفر، وفي هذه الحالة تصبح معادلة بواسون على النحو الآتي:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (28)$$

وتسمى هذه المعادلة، معادلة لابلاس، ويمكن بواسطة هذه المعادلة حساب الجهد في المناطق الخالية من الشحنات، وتعد هذه المعادلة من المعادلات الأساسية في مواضيع الكهربائية المستقرة.

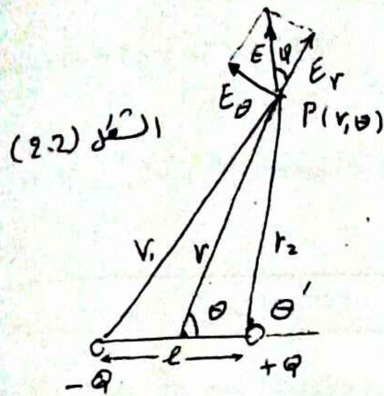
ثنائي القطب الكهربائي

ثنائي القطب الكهربائي أو ذو القطبين كما يسمى أحياناً هو عبارة عن شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة $+Q$ و $-Q$، وتفصل بينهما مسافة (إزاحة) صغيرة جداً بالمقارنة مع المسافة التي تبعد بها النقطة P المراد حساب شدة المجال أو الجهد عن مركز ثنائي القطب، ومركز ثنائي القطب هو منتصف المسافة بين الشحنتين كما في الشكل (2.2).

ولحساب الجهد في أي نقطة $P(r, \theta)$ تبعد مسافة r عن مركز ثنائي القطب فإننا نعتبر كل من الشحنتين $+Q$ و $-Q$، شحنتين نقطيتين وبهذا نحصل على:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} \quad (29)$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}(r_1 - r_2) \qquad (30)$$



لكننا نعلم أن

$$r_1^2 = r_2^2 + l^2 + 2r_2 l\cos\theta' \Rightarrow$$

$$r_1^2 - r_2^2 = l(l + 2r_2\cos\theta') \Rightarrow$$

$$r_1 - r_2 = \frac{l(l + 2r_2\cos\theta')}{r_1 + r_2} \qquad (31)$$

وباستعمال العلاقتين (30) و (31) نحصل على:

$$\Phi = \frac{Q\,l(l + 2r_2\cos\theta')}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \qquad (32)$$

وفي حالة ثنائي القطب المثالي أي عندما يكون $r \gg l$ فإن

$$r_1 = r_2 = r \quad , \quad \theta = \theta'$$

وبهذا تأخذ المعادلة (32) الشكل الآتي:

$$\Phi = \frac{Ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (33)$$

حيث أن $P = Ql$ هو عزم ثنائي القطب وتكون وحدة قياسه هي (Coul.m)
وهو مقدار متجه يعتبر اتجاهه الموجب من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة وإذا أخذنا ذلك بعين الاعتبار فإن المعادلة (33) تأخذ الشكل التالي:

$$\Phi = \frac{\vec{P}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (34)$$

نلاحظ هنا أن جهد (لكون) ثنائي القطب يتناسب عكسياً مع مربع المسافة (r) بالاختلاف عما هي عليه الحال بالنسبة للشحنة النقطية حيث أن الجهد يتناسب عكسياً مع المسافة (r)
ولحساب شدة المجال (الحقل) في النقطة $P(r,\theta)$ نستعمل المحاور القطبية فنجد أن.

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P}{r^3}\cos\theta \qquad (35.a)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3}\sin\theta \qquad (35,b)$$

ومن هاتين العلاقتين نجد أن شدة المجال في النقطة $P(r,\theta)$ لها مركبتين E_r باتجاه زيادة (r) والأخرى E_θ باتجاه زيادة θ. كما أننا نجد أن شدة المجال في كلا الاتجاهين تتناسب عكسياً مع مكعب المسافة عن مركز ثنائي القطب. وأن محصلة شدة المجال في النقطة $P(r,\theta)$ اعتماداً على العلاقتين (35,a) و (35,b)

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^{1/2} \quad (36)$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1+3\cos^2\theta\right)^{1/2}$$

والزاوية ميلها عن E_r هي:

$$\tan\varphi=\frac{E_\theta}{E_r}=\frac{1}{2}\tan\theta \quad (37)$$

القوة المؤثرة على ثنائي قطب في مجال كهربائي.

لنبدأ بحالة فيها يكون فيها ثنائي القطب متجهاً باتجاه الاحداثي السيني X. ولنعتبر أن المجال الكهربائي غير منتظم وأن طول ثنائي القطب صغير جداً أو يساوي Δx، فإن قيمة المجال الكهربائي عند الشحنة $(-Q)$ هي E_x وقيمته عند الشحنة $(+Q)$ هي $E_x+\Delta E_x$ أو $E_x+\left(\frac{dE_x}{dx}\right)\Delta x$. وهكذا نجد أن القوة المؤثرة على الشحنة السالبة هي $(-E_x Q)$ بينما القوة المؤثرة على الشحنة الموجبة هي $Q\left[E_x+\left(\frac{dE_x}{dx}\right)\Delta x\right]$.

وبما أن هاتين القوتين باتجاهين متعاكسين لذا فإن محصلتهما على ثنائي القطب هي الفرق بين هاتين القوتين:

$$F_x=Q\Delta x\frac{dE_x}{dx}=P_x\frac{dE_x}{dx} \quad (38)$$

وإذا كان لعزم ثنائي القطب والمجال الكهربائي مركبات في الاتجاهات الثلاثة (x,y,z) نجد أن

$$F_x=P_x\frac{dE_x}{dx}$$

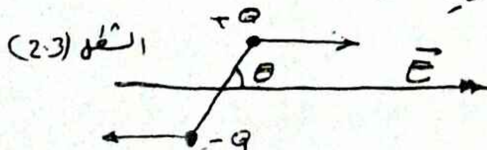
$$F_y=P_y\frac{dE_y}{dy} \quad (39)$$

$$F_z=P_z\frac{dE_z}{dz}$$

أما إذا كان المجال الكهربائي منتظماً فإن كلاً من F_x و F_y و F_z تساوي الصفر لأن الكميات $\frac{dE_x}{dx}$ و $\frac{dE_y}{dy}$، $\frac{dE_z}{dz}$ في هذه الحالة تساوي الصفر.

الطاقة الكامنة لثنائي قطب كهربائي في مجال كهربائي منتظم.

يمثل الشكل (2.3) ثنائي قطب كهربائي يصنع عزمه P زاوية مقدارها θ مع اتجاه المجال الكهربائي المنتظم E. فإذا فرضنا أن الجهد عند الشحنة السالبة يساوي Φ فإنه عند الشحنة الموجبة يكون مساوياً $\Phi+\Delta\Phi$ والطاقة الكامنة لثنائي القطب تكون:



الشكل (2.3)

$$U = Q(\phi + \Delta\phi) - Q\phi = Q\Delta\phi \quad (40)$$

فإذا كان طول ثنائي القطب مساوياً Δl فإن

$$\Delta\phi = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{l} \quad (41)$$

وهكذا نجد أن

$$U = -\vec{E}\cdot Q\cdot\Delta\vec{l} = -\vec{E}\cdot\vec{P} = -EP\cos\theta \quad (42)$$

وهذه المعادلة تمثل الطاقة الكامنة لثنائي القطب عند وضعه في مجال منتظم، والإشارة السالبة سببها أن العمل قد انجز من قبل المجال الكهربائي على ثنائي القطب.

العزم المؤثر على ثنائي قطب في مجال كهربائي منتظم.

من الشكل (2.3) نجد أن ثنائي القطب في هذه الحالة يتأثر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه وان مقدار كل منهما يساوي QE، وبالرغم من أن محصلة القوى على ثنائي القطب تساوي صفراً إلا أن العزم لا يساوي صفراً، والسبب في ذلك أن خط تأثير القوتين لا يقع على استقامة واحدة وبهذا نجد أن العزم المؤثر على ثنائي القطب يكون.

$$\Gamma = QE\,\frac{\Delta l}{2}\sin\theta + QE\,\frac{\Delta l}{2}\sin\theta \quad (42)$$

$$\Gamma = PE\sin\theta \quad (43)$$

ويمكن الحصول على هذه العلاقة مباشرة من المعادلة (42) حيث نجد أن

$$\Gamma = \frac{dU}{d\theta} = P.E.\sin\theta \quad (44)$$

أو

$$\Gamma = \vec{P}\times\vec{E} \quad (45)$$

وهذا يعني أن ثنائي القطب الكهربائي اذا وضع في مجال منتظم فإنه يتأثر بهذا المجال العزم يحاول أن يديره باتجاه المجال، أما اذا كان المجال غير منتظم فإن ثنائي القطب يتأثر بنوعين من الحركة، الأولى دورانية بتأثير العزم والأخرى انتقالية بتأثير محصلة القوى المسلطة عليه.